

Criterio	Nota Obtenida	Nota máxima	Comentario
A: Comunicación	4	/ 4	
B: Presentación matemática	3	/ 3	
C: Compromiso personal	4	/ 4	
D: Reflexión	2	/ 3	Podría haber identificado mejor las limitaciones y validez de los procedimientos, así como discutir los puntos fuertes y débiles de cada enfoque utilizado
E: Uso de las matemáticas	6	/ 6	
TOTAL	19	/ 20	

Ecuación para hallar el mínimo de movimientos que debe hacer un caballo de ajedrez para ir de un punto determinado del tablero a otro.

Contenido

Introducción.....	2
Conceptos clave	2
Datos: Campo del mínimo de movimiento	3
Desarrollo de la fórmula para hallar el mínimo de movimientos de un caballo de ajedrez.	4
Fórmula del patrón alfa.....	5
Fórmula de la sucesión FI.	5
Fórmula de la sucesión FP	9
Sucesión FPpx	9
Desarrollo de la fórmula del patrón alfa	9
Fórmula del patrón beta	10
Unificación de la fórmula del patrón alfa y el patrón beta	11
Conclusión	13
Apéndice	14

Introducción

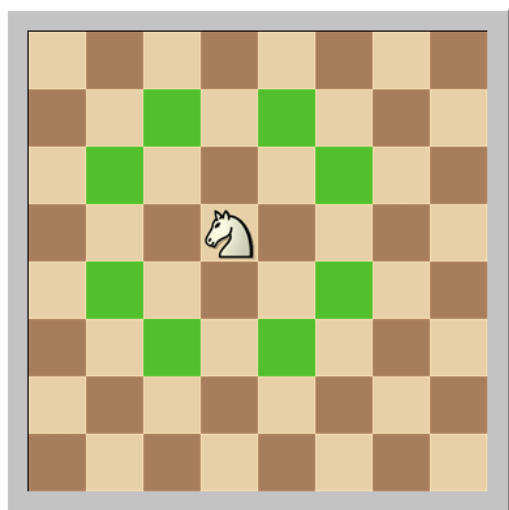
El juego de ajedrez ha cautivado a los matemáticos a lo largo de los siglos. Entre todas las piezas del juego, el caballo ha cautivado a los matemáticos por su peculiar manera de moverse. Un ejemplo de esto es el famoso problema del “Movimiento del Caballo”, que consiste en encontrar una forma para que el caballo recorra las 64 casillas del tablero sin caer en el mismo escaque dos veces.

Por otro lado, aunque se han estudiado las diversas maneras en las que un caballo puede recorrer un tablero de ajedrez sin tocar dos veces la misma casilla y se ha demostrado cuantas posibles rutas se pueden tomar, se ha dejado olvidada la investigación del movimiento del caballo en cuanto a encontrar cual es el mínimo de movimientos que ha de hacer un caballo para desplazarse de un lugar cualquiera del tablero de ajedrez a otro.

Es por ello que el objetivo de mi investigación es desarrollar, utilizando la función suelo perteneciente a la matemática discreta, un modelo matemático que exprese el mínimo de movimientos que ha de realizar un caballo de ajedrez para desplazarse de la coordenada (1,1) a cualquier punto en el tablero, explorando como es que las peculiaridades en el movimiento del caballo afectan el mínimo de movimientos que ha de hacer para desplazarse a un punto dado a gran escala.

La función suelo permitirá obtener la parte entera más baja de un número real, lo que será de utilidad para obtener los residuos de algunas divisiones necesarias para desarrollar el modelo matemático. Además se utilizará el método con el que se desarrollan ecuaciones lineales para unificar cada una de las partes del modelo en uno solo.

Aunque para un jugador aficionado al ajedrez puede no resultar útil conocer cuánto es el mínimo de movimientos que debería hacer para recorrer una cierta distancia en el tablero de ajedrez (para ir de esquina a esquina solo se necesitan seis movimientos), resulta muy útil conocer este número cuando se empieza a tratar con distancias muy grandes. De hecho, conocer el mínimo de movimientos necesarios permitiría probar la eficiencia de algoritmos de búsqueda de caminos.



Conceptos clave

Caballo de ajedrez:

El caballo de ajedrez es una pieza que se mueve de la manera en la que indica el diagrama del lado izquierdo. Siendo la única pieza que puede saltar sobre las demás:

Función suelo:

La función suelo pertenece a la rama de la matemática de la matemática discreta. Esta función devuelve el entero más grande menor o igual a x . (Cfr. Weisstein) En general se denota con la siguiente simbología: *Función suelo* $(x) = \lfloor x \rfloor$

Datos: Campo del mínimo de movimiento

En primer lugar, para desarrollar una fórmula que al ingresar un valor en "x" y un valor en "y" correspondientes a la coordenada de destino (tomando como partida la casilla 1,1) es necesario conocer a ciencia cierta el mínimo de movimientos en todos los puntos dados del tablero de ajedrez que permitan hallar un patrón para luego desarrollar una fórmula que los represente.

Para hallar ese patrón se pensó que la mejor manera era, en un tablero de ajedrez, asignarle a cada casilla un valor que indicara el mínimo de movimientos que debía hacer un caballo de ajedrez para desplazarse de esa casilla a la casilla (1,1), que viene a ser la casilla A1 en el tablero de ajedrez.

Ahora bien, la labor de asignarle a cada casilla el valor del mínimo de movimientos era un reto. Al principio se fue probando manualmente casilla por casilla el mínimo de movimientos que había que hacer para ir a la casilla (1,1). A medida que la distancia entre la casilla a la que se buscaba asignarle el valor y la casilla objetivo aumentaba la dificultad para hallar el camino más corto aumentaba. De hecho, siempre cabía preguntarse si el valor asignado realmente era el mínimo de movimientos o si, utilizando otro camino, se podía hallar un valor más pequeño.

Para resolver esto se ideó un método original con el que asegurarse que el valor hallado fuera el correcto. Para ello desarrolló el concepto de campo del mínimo de movimiento, un campo en forma de matriz bidimensional en donde cada casilla tiene un valor que equivale al mínimo de movimientos que son necesarios para ir de una posición dada en el espacio a la casilla (1,1), suponiendo que el caballo puede moverse libremente por todas las casillas del tablero, es decir que no haya obstáculos. Pero lo verdaderamente interesante del campo del mínimo de movimientos es la forma en la que se construye.

El campo del mínimo de movimiento es generado de la siguiente manera: En primer lugar se le asigna el valor cero a la casilla objetivo, pues se está mínimo a cero movimientos de ella.

En segundo lugar se coloca el número 1 a las casillas que se encuentran a un movimiento de caballo desde la casilla 0. Estas casillas se conocerán como *casillas tipo 1* porque, como es fácil de observar, estas casillas se encuentran a un movimiento mínimo de la casilla 0.

De la misma manera, si contemplamos las casillas que se encuentran a un movimiento de caballo de las casillas 1, podemos afirmar que se encuentran entonces a 2 movimientos de la casilla 0. Esto es porque se encuentran a un movimiento de las casillas que se encuentran a 1 movimiento mínimo de la casilla 0. Esto hace que estas casillas se encuentren a dos movimientos mínimos de la casilla 0. A estas casillas se le conocerán como *casillas tipo 2*

Como se observa, a la hora de generar a partir de las casillas tipo 1 las casillas tipo 2, parece ser que se debería de escribir un "2" en la casilla 0, pues se encuentra a un movimiento de caballo de las casillas tipo 1. Eso no se hace porque como el campo del mínimo de movimientos busca hallar el mínimo de movimientos, resulta ilógico asignarle un número más grande a una casilla que ya tiene número, porque no se estaría indicando el mínimo de movimientos.

En tercer lugar, luego se puede asignar el número 3 a las casillas que se encuentren a un movimiento de las casillas 2, con la excepción de aquellas casillas que ya tengan un número, dejando el número más pequeño en ella, ya que, como se explicó anteriormente, como el campo del mínimo de movimientos busca hallar el mínimo de movimientos en cada casilla, resulta

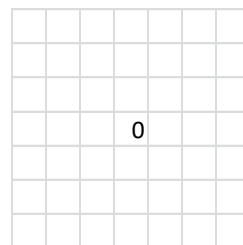


Figure 1: Campo del mínimo de movimientos solo con la casilla objetivo

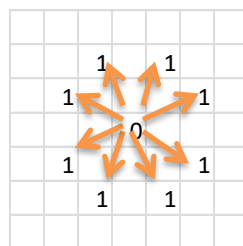


Figure 2: Casillas tipo 1 agregadas al campo del mínimo de movimientos.

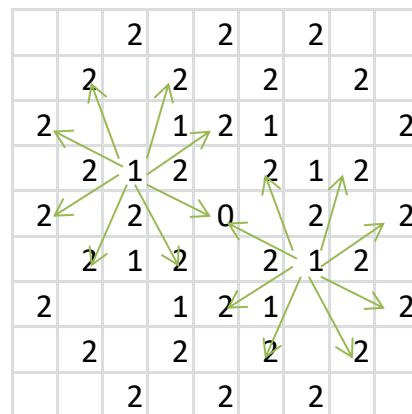


Figure 3: Patrón generado para casillas tipo 2. Para ejemplificar mejor el proceso se agregaron unas flechas que indican cómo se generó desde dos casillas tipo 1 las casillas tipo 2.

ilógico asignarle un número más grande a una casilla que ya tiene número porque no se estaría indicando el mínimo de movimientos.

En la ilustración anterior se observan unas casillas que se encuentran circuladas de color rojo. Estas casillas a la hora de generarse las casillas tipo 3 no se convirtieron en casillas tipo 3 porque ya eran de tipo 1 y, como se indicó anteriormente, las casillas han de conservar el tipo más pequeño.

Ahora bien, repitiendo de forma análoga el procedimiento anterior varias veces se puede llegar a generar un campo del mínimo de movimientos que permita encontrar un patrón con el que desarrollar la fórmula. A continuación un campo del mínimo de movimientos generado hasta casillas tipo 7.

De ahora en adelante para obtener una notación más cómoda se utilizará la abreviatura CMM para referirse al Campo del Mínimo de Movimientos. Al estudiarse el CMM

Desarrollo de la fórmula para hallar el mínimo de movimientos de un caballo de ajedrez.

Con el objetivo de desarrollar la fórmula del mínimo de movimientos del caballo de ajedrez se continuó con el análisis del CMM. En primer lugar, al analizar visualmente el CMM se descubrió se encuentra dividido por dos ejes de simetría, por lo que es simétrico.

Es necesario saber que la simetría es *la correspondencia exacta en la disposición de los puntos o partes de un cuerpo o figura respecto a un centro, eje o plan*. (Pérez Porto & María, 2013) Un eje de simetría es *aquella recta que, al ser tomada como sostén de giro en el movimiento de una figura, hace que se superpongan todos los puntos análogos*. (Diccionario de la Real Academia Española, 2017)

Así pues, el CMM se encuentra dividido por cuatro ejes de simetría. Para el desarrollo de la investigación se decidió dividir el CMM en cuatro cuadrantes, delimitados por los ejes rojos.

La división del CMM en cuatro cuadrantes simétricos permite que, en lugar de analizar cada uno de los cuadrantes para hallar la fórmula, solamente se explore uno de ellos y que esas conclusiones se generalicen. Esto es porque en caso de hallar una fórmula que exprese el mínimo de movimientos en un cuadrante, gracias a las propiedades simétricas del CMM esa fórmula puede ser usada de manera análoga en otro cuadrante, simplemente otorgándole la coordenada equivalente al cuadrante en el que se la desarrolló. Esto se verá más adelante con más detenimiento.

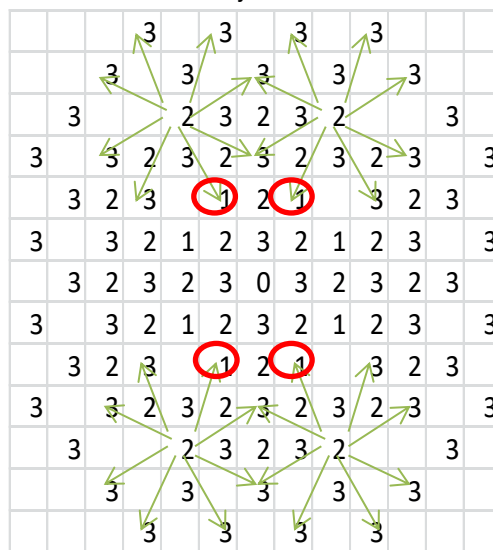


Figure 4: Patrón generado para casillas tipo 3. Para ejemplificar mejor el proceso se agregaron unas flechas que indican cómo se generó desde cuatro casillas tipo 2 las casillas tipo 3.

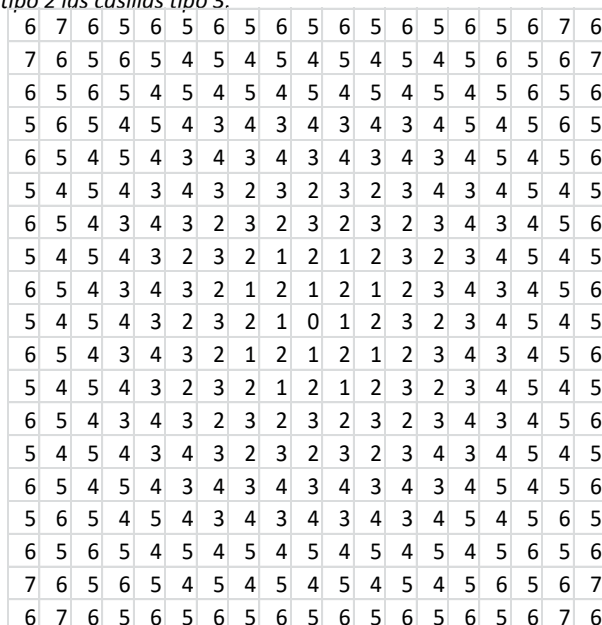


Figure 5: Campo del mínimo de movimientos de 19 x 19 en donde las casillas de tipo más grande son las casillas tipo 7.

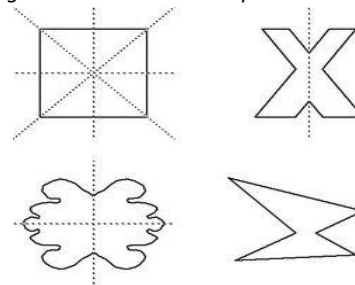


Figure 6: Ejemplo de figuras con sus respectivos ejes de simetría. La figura de la esquina inferior derecho no es simétrica. Extraído de: https://es.wikipedia.org/wiki/Eje_de_simetr%C3%80Da

Así pues se determinó que se trabajaría en el cuadrante I para desarrollar la fórmula. Al analizar con detenimiento el cuadrante I se pueden encontrar tres sub-campos. Los sub-campos se encuentran delimitados por dos sucesiones que vienen a ser las siguientes:

$$A_{n+1} = \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2 \\ y_{n+1} = y_n + 1 \end{cases} \text{ donde } A_1 = \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

$$B_{n+1} = \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 1 \\ y_{n+1} = y_n + 2 \end{cases} \text{ donde } B_1 = \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

El primer sub-campo comprende del eje y a la sucesión B, el segundo sub-campo va de la sucesión B a la sucesión A. Finalmente el tercer sub-campo se extiende de la sucesión A al eje x.

Al realizar esta división se comprende que gracias a la simetría del CMM el patrón del primer sub-campo es similar al del tercer sub-campo. De hecho, al observar el eje de simetría representado con la línea de color azul que corta en diagonal el cuadrante I del CMM se aprecia como una sección se “refleja” en la otra.

Ya que el primer sub-campo contiene un patrón similar al tercer sub-campo podemos tratarlos a los dos como un mismo tipo de patrón, que se llamará alfa. El patrón perteneciente al segundo sub-campo será llamado beta.

Gracias a esta división hecha del CMM se determinaron cuatro pasos para desarrollar la fórmula del mínimo de movimientos del caballo: hallar una fórmula que exprese al patrón alfa, escribir una fórmula que exprese al patrón beta, idear una forma para unir las dos fórmulas en una sola y generalizar esa fórmula del cuadrante I al resto del CMM.

Fórmula del patrón alfa

Al analizar el patrón alfa se encontró que, tomando como referencia el sub-campo 3, el patrón existente en la fila inferior ($y = 1$) se refleja en las filas que son impares del sub-campo 3. Por otra parte el patrón existente en la fila $y = 2$ se refleja en todas las filas pares del sub-campo 3. Naturalmente, estos patrones se rompen al entrar en contacto con el patrón beta. Al patrón de las filas impares se le conocerá como sucesión FI (eje F impar) y al patrón de las filas pares se le conocerá como sucesión FP (fila par).

Una sucesión matemática es un conjunto ordenado de objetos matemáticos, generalmente números. El orden en que aparecen los términos sí es relevante y un mismo término puede aparecer en más de una posición. (Concepto de sucesión. Progresiones: Agrega educación) Nótese que a causa de la simetría los patrones FI y FP se reflejan en el sub-campo 1, solo que en ese caso en lugar de filas se trata de columnas.

Debido a lo anterior se determinó que para hallar la fórmula del patrón alfa era necesario desarrollar la fórmula de la sucesión FP y la fórmula de la sucesión FI para luego unificarlas en una sola.

Fórmula de la sucesión FI.

Se tomó como ejemplo de la sucesión FI la primera fila. (Véase la primera fila en la figura 9). Al analizarla se observó que a partir de la casilla 3 se presenta una sucesión definida, que viene a ser:

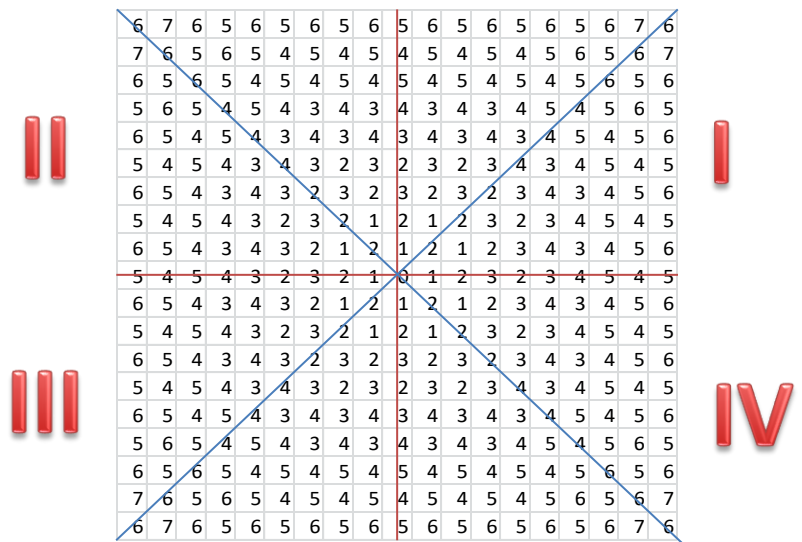


Figure 7: Ejes de simetría del CMM. En rojo los ejes de simetría que dividen al CMM en cuatro cuadrantes. Nótese la rotulación de cada uno de los diferentes cuadrantes.

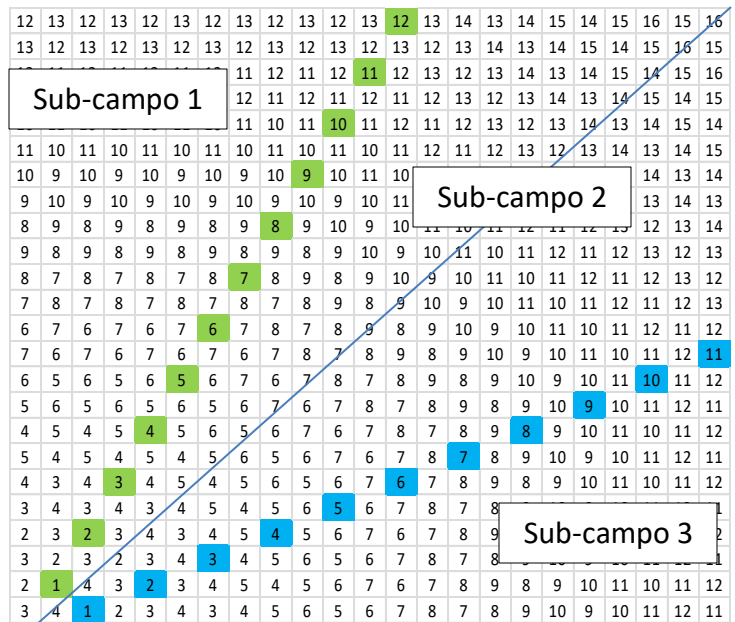


Figure 8: En verde la sucesión B y en azul la sucesión A. Nótese una línea celeste que viene a ser un eje de simetría en el cuadrante I.

$$\{FI_n\}_{n \in \mathbb{N}} = 2,3,2,3,4,5,4,5,6,7,6,7,8,9,8,9,10,11,10,11 \dots$$

Con el objetivo de simplificar la sucesión se decidió dividirla en dos sucesiones, de manera que:

$$\{FI_i\} = \text{Todo } \{FI_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ donde } n \text{ es impar}$$

$$\{FI_p\} = \text{Todo } \{FI_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ donde } n \text{ es par}$$

En este caso n hace referencia al término dentro de la sucesión $\{FI_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Llamaremos término general de una sucesión a X_n , donde el subíndice $n \in \mathbb{N}$ indica el lugar que ocupa en dicha sucesión. Esto viene a ser como la columna o la coordenada en x en la que se encuentra el caballo. A partir de ahora, para evitar confusiones cabe aclarar que n hará referencia al mínimo de movimientos y x al término dentro de la sucesión.

Conviene también aclarar que todo número par es todo número entero que podemos escribir de la forma $2n$, con $n \in \mathbb{Z}$. (Matemática: Números pares e impares) Mientras que todo número impar es un entero que podemos escribir de la forma $2n + 1$, con $n \in \mathbb{Z}$. (Ibídem)

Sucesión FI_x

Ahora bien, se descubrió que al partir el número de columna de las casillas más uno por la mitad, es decir $x_f = \frac{x_0+1}{2}$, se obtenía una nueva sucesión, sucesión que podía volver a ser separada entre aquellos términos en donde x fuera par y en donde x fuera impar.

Como se explicó anteriormente, se determinó que era posible desarrollar dos nuevos arreglos "pares" e "impares" obtenidos a partir de la sucesión $\{FI_x\}$ modificada. Se llamarán sucesión impar-par $\{FI_{p_x}\}$ y sucesión impar-impar $\{FI_{i_x}\}$.

Al ser analizadas las tablas anteriores se descubrió que cada una de las dos sucesiones presentadas anteriormente podía ser representada por medio de ecuaciones lineales. Una ecuación lineal es una igualdad que se torna verdadera para algún o algunos valores de la variable cuando la variable es de primer grado. (Cfr. Ecuaciones lineales: EcuRed)

Para hallar la ecuación de la sucesión $\{FI_{p_x}\}$ y la sucesión $\{FI_{i_x}\}$ se observó que ambas eran una sucesión aritmética, por lo que contaban con una diferencia que era añadida al término anterior. La diferencia en ambas sucesiones era 2, mientras que lo que variaba era el primer término. De esa manera se determinó que las ecuaciones del mínimo de movimientos en las sucesiones eran las siguientes (las ecuaciones fueron escritas de diferente manera para mayor comodidad):

$$\text{(Ecuación 1.1.1)} \quad \{FI_{i_x}\} = n = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - 1$$

$$\text{(Ecuación 1.1.2)} \quad \{FI_{p_x}\} = n = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$$

Uniendo estas dos ecuaciones se puede obtener la ecuación de las sucesiones impares. Para unirlas fue fundamental que se observara que lo que diferencia a una ecuación de la otra es que en la ecuación *impar-impar*, a diferencia de la ecuación *par-par* se resta uno a la expresión $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$. Otro descubrimiento fundamental fue encontrar que cuando x pertenecía a la sucesión *impar-impar* $(-1)^{\frac{x+1}{2}} = -1$ y cuando x pertenecía a la sucesión *impar-par* $(-1)^{\frac{x+1}{2}} = 1$.

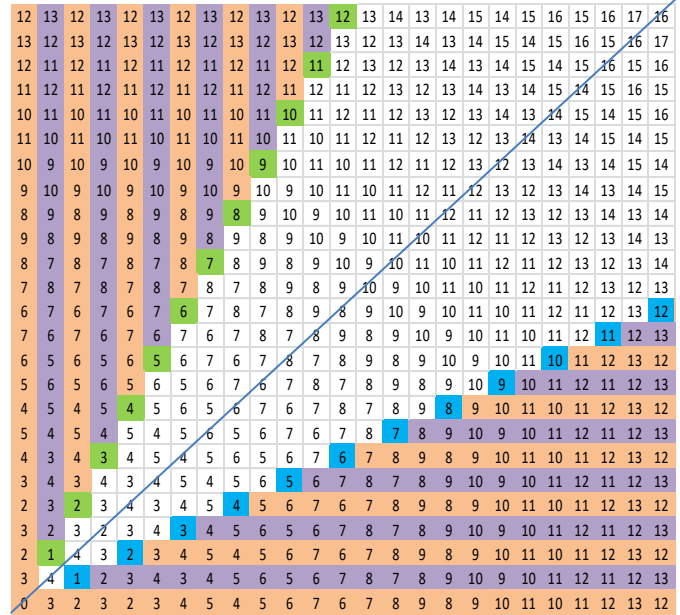


Figure 9: En anaranjado sucesión FI y en morado sucesión FP. Nótese la simetría entre el sub-campo 1 y el sub-campo 3.

n	0	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10	12	12	14	14	16	16	18	18
Casilla(x)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37

Figure 10: Tabla que representa el mínimo de movimientos (n) con respecto a la columna en la que se encuentra el caballo (x) en la sucesión FI_x

n	0	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10	12	12	14	14	16	16	18	18
Casilla(x)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37
(Casilla+1)/2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Figure 11: Sucesión FI_x modificada para permitir nuevamente una división entre par e impar.

n	0	2	4	6	8	10	12	14	16
(Casilla+1)/2	1	3	5	7	9	11	13	15	17

Figure 12: Sucesión: $\{FI_{i_x}\}$ (impar-impar). Nótese que casilla = x.

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18
(Casilla+1)/2	2	4	6	8	10	12	14	16	18

Figure 13: Sucesión: $\{FI_{p_x}\}$ (impar-par). Nótese que casilla = x.

Con esto en mente se determinó que para unificar estas dos ecuaciones se podía utilizar un método análogo al utilizado para desarrollar las ecuaciones lineales que describen una recta en una gráfica, en donde los dos puntos por los que pasaba la recta eran (1,0) y (-1,-1). Esto porque cuando x pertenecía a la sucesión *impar-par* $(-1)^{\frac{x+1}{2}} = 1$ y lo que se añadía a la expresión $\left[\frac{x+1}{2}\right]$ era cero (de ahí que las coordenadas del primer punto sean (1,0)). Mientras que cuando x pertenecía a la sucesión *impar-impar* $(-1)^{\frac{x+1}{2}} = -1$ y a la expresión $\left[\frac{x+1}{2}\right]$ se le restaba 1. (-1,-1)

Así pues primero se calculó la pendiente de dicha recta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_f - y_o}{x_f - x_o} = \frac{0 - (-1)}{1 - (-1)}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

Luego se escribió la ecuación de la siguiente manera:

$$y_f - y_o = m(x_f - x_o)$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \text{ donde } x = (-1)^{\frac{x+1}{2}}$$

Luego se sumó la ecuación de la recta a la expresión $\left[\frac{x+1}{2}\right]$, quedando completa la ecuación para la sucesión FI.

$$\text{(Ecuación 1.1.3)} \quad \{FI_x\} = n = \left[\frac{x+1}{2}\right] + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{x+1}{2}} - \frac{1}{2}$$

Sucesión FIP_x

De manera análoga a como se hizo con la sucesión FII_x , como primer paso se creó una nueva sucesión a partir de la sucesión FIP_x original. En la nueva sucesión modificada $x_f = \frac{x_o}{2}$.

n	3	3	3	5	5	7	7	9	9	11	11	13	13	15	15
Casilla(x)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30

Figure 14: Tabla que representa el mínimo de movimientos (n) con respecto a la columna en la que se encuentra el caballo (x) en la sucesión FIP_x

Se determinó que, análogamente a lo que se había hecho en la sucesión $\{FII_x\}$, era posible desarrollar dos nuevos arreglos “pares” e “impares” obtenidos a partir de la sucesión $\{FIP_x\}$ modificada. Se llamarán sucesión par-par $\{FIP_{px}\}$ y sucesión par-impar $\{FIP_{ix}\}$.

n	3	3	3	5	5	7	7	9	9	11	11	13	13	15	15
Casilla(x)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
Casilla/2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Figure 16: Sucesión FIP_x modificada para permitir nuevamente una división entre par e impar.

De forma análoga a como se determinaron las ecuaciones (1.1) y (1.2) se concluyó que las expresiones de las sucesiones *par-par* y *par-impar* eran las siguientes:

n	3	3	5	7	9	11	13	15
Casilla/2	1	3	5	7	9	11	13	15

Figure 15: Sucesión: $\{FIP_{ix}\}$ (par-impar). Nótese que casilla = x.

$$\text{(Ecuación 1.2.1)} \quad \{FIP_{ix}\} = n = \frac{x}{2}$$

$$\text{(Ecuación 1.2.2)} \quad \{FIP_{px}\} = n = \frac{x}{2} + 1$$

Se descubrió que cuando la sucesión era *par-impar* a la expresión $\frac{x}{2}$ se le sumaba 0 y $(-1)^{\frac{x}{2}} = -1$. Por otra parte cuando la sucesión era *par-par* a la expresión $\frac{x}{2}$ se le sumaba +1 y $(-1)^{\frac{x}{2}} = 1$. Utilizando el método análogo ha como se desarrolló la ecuación (1.3), se concluyó que la expresión que unificaba ambas ecuaciones era la siguiente:

n	3	5	7	9	11	13	15	17
Casilla/2	2	4	6	8	10	12	14	16

Figure 17: Sucesión: $\{FIP_{px}\}$ (par-par). Nótese que casilla = x.

$$\text{(Ecuación 1.2.3)} \quad \{FIP_x\} = n = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}$$

Desarrollo de la ecuación para la sucesión FI_x

Para el desarrollo de una ecuación que expresase la sucesión FI_x era necesario unir ñas ecuaciones (1.1.3) y (1.2.3) de manera que pasaran a formar una sola. Para ello el primer paso fue determinar que cuando la sucesión $\{FI_x\}$ existía entonces $(-1)^x = -1$ y cuando la sucesión $\{FIp_x\}$ existían entonces $(-1)^x = 1$. Esta propiedad descubierta permitió servir como identificador de cuando la sucesión debía adoptar la forma (1.1.3) y cuando la forma (1.2.3)

$$\text{(Ecuación 1.1.3)} \quad \{FI_x\} = n = \left[\frac{x+1}{2} \right] + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{x+1}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$\text{(Ecuación 1.2.3)} \quad \{FIp_x\} = n = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}$$

En primer lugar se establecieron las diferencias entre las dos ecuaciones, las cuales fueron escritas en una tabla:

Ecuación (1.1.3)	Ecuación (1.2.3)
$(-1)^{\frac{x}{2}} = -1$	$(-1)^{\frac{x}{2}} = 1$
1. En una se suma +1 y en la otra +0	
$\left[\frac{x+1}{2} \right]$	$\frac{x}{2}$
2. En una el exponente tiene sumado +1 y en la otra +0	
$(-1)^{\frac{x+1}{2}}$	$(-1)^{\frac{x}{2}}$
3. En una el último término se está restando y en la otra se está sumando	
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$

El segundo paso fue escribir dos ecuaciones lineales de manera que unificaran cada una de las diferencias antes en listadas. Dos porque a efectos prácticos la 1er y 2da diferencia son pueden ser trabajadas como una misma. Así, siguiendo el procedimiento con el que se desarrolló la ecuación (1.1.1)

Puntos de la recta: (-1,1) y (1,0)

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_f - y_o}{x_f - x_o} = \frac{0 - (1)}{1 - (-1)}$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

$$y_f - y_o = m(x_f - x_o)$$

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(-1)^x + \frac{1}{2}$$

Para la segunda diferencia se estableció que la ecuación era: $\frac{1}{2}(-1)^x$

Luego se unificaron todas estas ecuaciones, de manera que se obtuvo la siguiente expresión:

$$\text{(Ecuación 1.3)} \quad \{FI_x\} = n = \left[\frac{x - \frac{1}{2}(-1)^x + \frac{1}{2}}{2} \right] + \left[\frac{1}{2}(-1)^{\frac{x - \frac{1}{2}(-1)^x + \frac{1}{2}}{2}} \right] + \left[\frac{1}{2}(-1)^x \right]$$

Nótese que gracias al método original utilizado se logró que cuando x pertenezca a la sucesión Fli_x la ecuación adoptará la forma de la ecuación (1.1.3) mientras que cuando x pertenezca a la sucesión Fip_x la fórmula adoptará la forma de la expresión (1.2.3)

Fórmula de la sucesión FP

De forma análoga al procedimiento realizado con la sucesión FI, el primer paso fue simplificar la sucesión se decidió dividirla en dos sucesiones, de manera que:

$$\{FP_x\}_{x \in \mathbb{N}} = 2,3,2,3,4,5,4,5,6,7,6,7,8,9,8,9,10,11,10,11 \dots$$

$$\{FPI_x\} = \text{Todo } \{FP_x\}_{x \in \mathbb{N}} \text{ donde } x \text{ es impar}$$

$$\{FPP_x\} = \text{Todo } \{FP_x\}_{x \in \mathbb{N}} \text{ donde } x \text{ es par}$$

Sucesión FPI_x

Utilizando un método análogo al empleado para encontrar la fórmula de la sucesión Fli_x se dividió la sucesión en sucesiones *impar-impar* e *impar-par*, siendo sus ecuaciones las siguientes:

n	3	3	5	5	7	7	9	9	11	11	13	13	15	15	17	17
Casilla(x)	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35

Figure 18: Tabla que representa el mínimo de movimientos (n) con respecto a la columna en la que se encuentra el caballo (x) en la sucesión FPI_x

$$(Ecuación 2.1.1) \quad \{FPI_{px}\} = n = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - 1$$

$$(Ecuación 2.1.2) \quad \{FPI_{ix}\} = n = \left\lceil \frac{x+1}{2} \right\rceil$$

Luego, siguiendo un método análogo al que fue utilizado para unificar las ecuaciones (1.1.1) y (1.1.2) y crear la ecuación (1.1.3) se unificaron las anteriores ecuaciones:

$$(Ecuación 2.1.3) \quad \{FPI_x\} = n = \frac{x+1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^{\frac{x+1}{2}} - \frac{1}{2}$$

Sucesión FPP_x

Se utilizó el método empleado anteriormente para desarrollar la ecuación (2.1.3), de manera que las ecuaciones vienen a ser las siguientes:

n	2	4	4	6	6	8	8	10	10	12	12	14	14	16	16	18	18
Casilla(x)	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36

Figure 19: Tabla que representa el mínimo de movimientos (n) con respecto a la columna en la que se encuentra el caballo (x) en la sucesión FPP_x

$$(Ecuación 2.2.1) \quad \{FPP_{px}\} = n = \frac{x}{2} + 1$$

$$(Ecuación 2.2.2) \quad \{FPP_{ix}\} = n = \frac{x}{2}$$

Luego se unificaron:

$$(Ecuación 2.2.3) \quad \{Fip_x\} = n = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}(-1)^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}$$

Desarrollo de la ecuación para la sucesión FP_x

Se utilizó un método análogo al empleado para desarrollar la ecuación (1.3), de manera que se obtuvo la siguiente ecuación:

$$(Ecuación 2.3) \quad \{FP_x\} = n = \left\lfloor \frac{x - \frac{1}{2}(-1)^x + \frac{1}{2}}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{2}(-1)^{\frac{x - \frac{1}{2}(-1)^x + \frac{1}{2}}{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2}(-1)^x \right\rfloor$$

Desarrollo de la fórmula del patrón alfa

Se procedió a unificar las ecuaciones (1.3) y (2.3). Primero se determinó que cuando la fila es par viene a ser lo mismo a decir que la coordenada en y es par. Recuerde que la coordenada de la casilla objetivo es la (1,1), es decir que no existe $y = 0$ o $x = 0$

$$(Ecuación 1.3) \quad \{FI_x\} = n = \left[\frac{x - \frac{1}{2}(-1)^x + \frac{1}{2}}{2} \right] + \left[\frac{1}{2}(-1)^{\frac{x - \frac{1}{2}(-1)^x + \frac{1}{2}}{2}} \right] + \left[\frac{1}{2}(-1)^x \right]$$

$$(Ecuación 2.3) \quad \{FP_x\} = n = \left[\frac{x - \frac{1}{2}(-1)^x + \frac{1}{2}}{2} \right] - \left[\frac{1}{2}(-1)^{\frac{x - \frac{1}{2}(-1)^x + \frac{1}{2}}{2}} \right] + \left[\frac{1}{2}(-1)^x \right]$$

Se descubrió que lo que diferencia a ambas ecuaciones es que la segunda agrupación entre corchetes de la ecuación (2.3) es negativa. Además, es interesante notar que cuando FP_x existe $(-1)^y = 1$ y cuando FI_x existe $(-1)^y = -1$. Esto permitió unir las ecuaciones de la siguiente manera:

$$(Ecuación 3) \quad \{a_{x,y}\} = n = \left[\frac{x - \frac{1}{2}(-1)^x + \frac{1}{2}}{2} \right] - (-1)^y \left[\frac{1}{2}(-1)^{\frac{x - \frac{1}{2}(-1)^x + \frac{1}{2}}{2}} \right] + \left[\frac{1}{2}(-1)^x \right]$$

Nótese que cuando FI_x exista $(-1)^y = -1$ y la ecuación va adoptar la forma de la ecuación (1.3). Por otra parte cuando sea FI_x la que exista $(-1)^y = 1$ y la ecuación va adoptar la forma de la expresión (2.3).

Fórmula del patrón beta

Al estudiar el patrón beta lo primero que se encontró fue que cada diagonal tenía el mismo valor de n , es decir que cada diagonal tenía el mismo tipo de casilla. Además, se descubrió que la suma de $x + y$ en cada diagonal era la misma para todas las casillas.

Así pues se determinó que la suma de $x + y$ fuera el identificador de cada diagonal. Luego se realizó una tabla que contuviera los valores de n con respecto a la suma de $x + y$.

Se observó que n seguía un patrón de manera que los siguientes tres términos eran igual a los anteriores términos más uno. Así pues se descubrió que para que $x + y$ dieran igual a n debía de aplicarse la siguiente ecuación:

$x + y$	Ecuación	n	Residuo
7	$\frac{x + y + 2}{3}$	3	1
8	$\frac{x + y - 2}{3}$	2	2
9	$\frac{x + y + 0}{3}$	3	0
10	$\frac{x + y + 2}{3}$	4	1
11	$\frac{x + y - 2}{3}$	3	2
12	$\frac{x + y + 0}{3}$	4	0

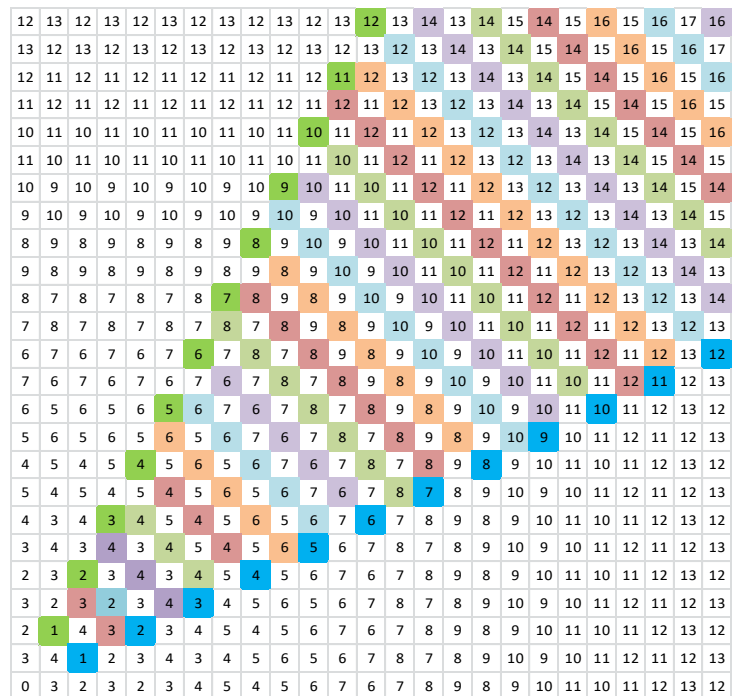


Figure 20: Patrón beta. Las diagonales han sido coloreadas de manera intercalada para distinguirlas mejor. Nótese que la suma de $x + y$ en cada casilla de una misma diagonal es la misma.

n	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7
$x+y$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

Figure 21: Tabla que muestra los valores de (n) respecto a ($x+y$).

Se descubrió que cuando se realiza la operación $\frac{x+y}{3}$ el residuo es cero entonces se suma cero a $x + y$. Por otra parte, cuando el residuo es uno se suma 2 y cuando el residuo es 2 se resta 2.

Luego se escribió una expresión que permitiera obtener el residuo de la división arriba indicada (nótese que se utiliza la función suelo):

$$(Ecuación 4.1) \quad r = (x + y) - 3 \left\lfloor \frac{x + y}{3} \right\rfloor$$

Después se desarrolló una expresión, denotada por la letra l , que cuando el residuo fuera mayor a 1 diera como resultado 1 y cuando el residuo fuera igual a 0 diera como resultado -1:

$$l = \frac{r - 0.1}{|r - 0.1|}$$

$$(Ecuación 4.2) \quad l = \frac{(x + y) - 3 \left\lfloor \frac{x + y}{3} \right\rfloor - 0.1}{\left| (x + y) - 3 \left\lfloor \frac{x + y}{3} \right\rfloor - 0.1 \right|}$$

Seguidamente se desarrolló una expresión que, utilizando la ecuación (4.2), cuando el residuo fuera 0 se convirtiera en la expresión: $(x + y + 0)/3$ mientras que cuando el residuo fuera 1 se transformara en la expresión : $(x + y + 2)/3$ y cuando el residuo fuera 2 se convirtiera en la expresión : $(x + y - 2)/3$

$$n = -(-1)^r(l + 1) + x + y$$

Sustituyendo se obtiene:

$$(Ecuación 4.3) \quad \{\beta_{x,y}\} = n = \frac{-(-1)^{(x+y)-3\left(\frac{x+y}{3}\right)} \left[\frac{(x+y) - 3\left(\frac{x+y}{3}\right) - 0.1}{\left| (x+y) - 3\left(\frac{x+y}{3}\right) - 0.1 \right|} + 1 \right] + x + y}{3}$$

Unificación de la fórmula del patrón alfa y el patrón beta

Para unificar las ecuaciones (3) y (4.3) en una sola, se descubrió que había que desarrollar una ecuación que cuando la casilla elegida estuviera dentro del patrón alfa adoptara la forma de la ecuación (3) y cuando estuviera dentro del patrón beta adoptara la forma del patrón (4.3).

Para ello se ideó que ambas ecuaciones fueran términos que se estuvieran sumando en una nueva expresión, solo que cada término estuviera multiplicándose por una función especial. Esta función especial tendría la propiedad que cuando la casilla estuviera dentro del patrón alfa multiplicara por 1 la expresión (3) y por cero la expresión (4.3). De la misma manera se ideó que cuando la casilla se encontrara dentro del patrón beta multiplicara por 0 la expresión (3) y por uno la expresión (4.3).

Cabe hacer notar que para desarrollar esta función especial solamente se contempló en el análisis el sector de CMM comprendido entre el eje de simetría azul y el eje x. (Ver figura 22)

Se tomó como m al valor de la sucesión A que se encuentra en la misma fila que la casilla seleccionada. Sea f la función especial:

$$(Ecuación 5.1) \quad m = 2y - 1$$

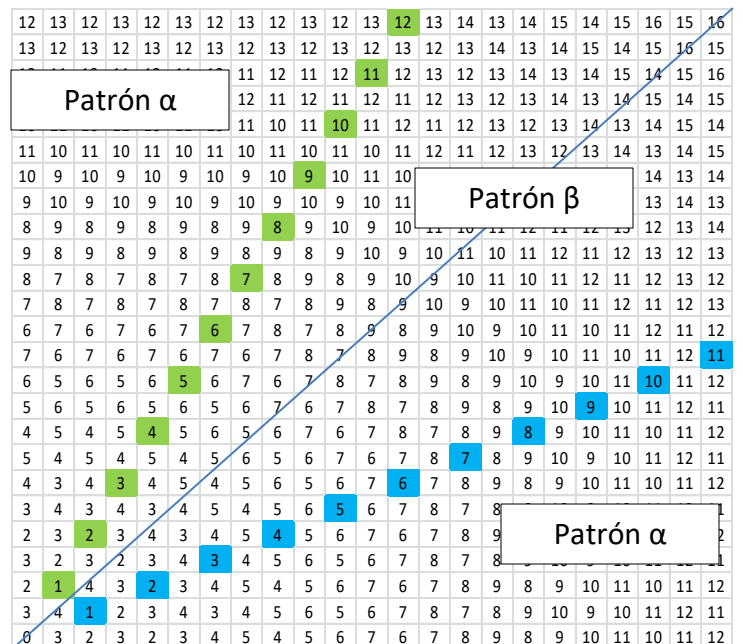


Figure 22: En verde la sucesión B y en azul la sucesión A. Nótese una línea celeste que viene a ser un eje de simetría en el cuadrante I.

$$f = \frac{1}{2} \left(\frac{x - (m - 0.1)}{|x - (m - 0.1)|} + 1 \right)$$

$$(Ecuación 5.2) \quad f = \frac{1}{2} \left(\frac{x - (2y - 1.1)}{|x - (2y - 1.1)|} + 1 \right)$$

Así pues, luego se desarrolló la inversa de la función especial. Esto porque mientras un término es multiplicado por la función especial el otro es multiplicado por el inverso:

$$(Ecuación 5.3) \quad f^{-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{-(x - (2y - 1.1))}{|x - (2y - 1.1)|} + 1 \right)$$

Finalmente, es posible unificar la fórmula del patrón alfa con la fórmula del patrón beta:

$$n = f\alpha + f^{-1}\beta$$

$$(Ecuación 5.4) \quad n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x - (2y - 1.1)}{|x - (2y - 1.1)|} \right) + 1 \right] \left[\left(\frac{x - \frac{1}{2}(-1)^x + \frac{1}{2}}{2} \right) - (-1)^y \left(\frac{1}{2}(-1)^{\frac{x - \frac{1}{2}(-1)^x + \frac{1}{2}}{2}} \right) + \left(\frac{1}{2}(-1)^x \right) \right] - (-1)^{(x+y)-3 \left(\left\lfloor \frac{(x+y)}{3} \right\rfloor \right)} \left[\left(\frac{\left\lfloor \frac{(x+y)}{3} \right\rfloor - 0.1}{\left\lfloor \frac{(x+y)}{3} \right\rfloor - 0.1} \right) + 1 \right] + x + y + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{-(x - (2y - 1.1))}{|x - (2y - 1.1)|} \right) + 1 \right] \left[\frac{\left(\frac{\left\lfloor \frac{(x+y)}{3} \right\rfloor - 0.1}{\left\lfloor \frac{(x+y)}{3} \right\rfloor - 0.1} \right) + 1}{3} \right] + x + y$$

Ahora bien, cabe recordar que esta fórmula sólo se aplica al cuadrante I del CMM. Es más, la fórmula especial solo funciona en la mitad del cuadrante I del CMM. Para que la ecuación (5.4) funcionara en todo el resto del CMM se determinaron las siguientes reglas de equivalencia:

En primer lugar ya no se habla de x y y sino de g y h , en donde g adquiere el valor más grande entre x y y (h adquiere el valor restante). Además, en la fórmula sólo se agrega el valor absoluto de g y h . Así pues, cuando se quiere calcular el mínimo de movimientos que ha de hacer un caballo de ajedrez para ir de una coordenada x,y al punto (1,1) g adquiere el valor más grande entre x y y h adquiere el valor restante. Esto se ve porque tanto (5,7) como (7,5) tienen el mismo tipo de casilla gracias a la simetría que presenta el CMM.

De esta manera la ecuación (5.4) se transforma en:

12	13	12	13	12	13	12	13	12	13	12	13	12	13	12	13	14	13	14	15	14	15	16	15	16
13	12	13	12	13	12	13	12	13	12	13	12	13	12	13	12	13	14	13	14	15	14	15	16	15
12	11	12	11	12	11	12	11	12	11	12	11	12	11	12	11	12	13	12	13	14	13	14	15	14
11	12	11	12	11	12	11	12	11	12	11	12	11	12	11	12	13	12	13	14	13	14	15	14	15
10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14	13	14
11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	10	11	12	11	12	13	12	13	14	15
10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	14	13	14
9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10	11	10	11	12	11	12	13	14	13
8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	13	14
9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10	11	12	13	14	13
8	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	10	11	10	11	12	13	14	13	12
7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	10	11	10	11	12	13	14	13
6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	9	10	9	10	11	10	11	12
7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	9	10	11	10	11	12	13	14	11
6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	7	8	9	10	11	10	11	12	13	11
5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	7	8	9	10	11	10	11	12	11
4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	6	7	8	9	10	11	10	11	12
5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	6	7	8	9	10	11	10	11	12	11
4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	6	7	8	9	10	11	10	11	12
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	6	7	8	9	10	11	10	11	12	11
2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	10	11	12
3	2	3	2	3	4	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	9	10	11	10	11	12	11	12	11
2	1	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	10	11	10	11	12	11	12
3	4	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8	9	10	9	10	11	12	11	12	11
0	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9	8	9	10	11	10	11	12	11	12

Figure 23: Casillas (5,7) y (7,5) marcadas en rojo. Nótese que tienen el mismo tipo.

$$\begin{aligned}
 & \text{(Ecuación 5.4)} \quad n \\
 & = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{g - (2h - 1.1)}{|g - (2h - 1.1)|} \right) + 1 \right] \left[\left(\frac{g - \frac{1}{2}(-1)^g + \frac{1}{2}}{2} \right) - (-1)^h \left(\frac{1}{2}(-1)^{\frac{g-1}{2}(-1)^g + \frac{1}{2}} \right) + \left(\frac{1}{2}(-1)^g \right) \right] \\
 & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{-(g - (2h - 1.1))}{|g - (2h - 1.1)|} \right) + 1 \right] \left[\frac{-(-1)^{(g+h)-3 \left(\left\lfloor \frac{g+h}{3} \right\rfloor \right)} \left[\left(\frac{\left[(g+h) - 3 \left(\left\lfloor \frac{g+h}{3} \right\rfloor \right) \right] - 0.1}{\left[(g+h) - 3 \left(\left\lfloor \frac{g+h}{3} \right\rfloor \right) \right] - 0.1} \right) + 1 \right] + g + h}{3} \right]
 \end{aligned}$$

Donde $h > 4$ y $g > 4$ cuando $g > h$

Conclusión

En definitiva, la investigación cumplió el objetivo de realizar un modelo matemático que expresara el mínimo de movimientos del caballo de ajedrez. Para ello primero se desarrolló el concepto del campo del mínimo de movimientos, el cual permitía visualizar en una matriz bidimensional el mínimo de movimientos que debía hacer un caballo de ajedrez para ir de una casilla cualquiera a la casilla (1,1).

Luego se dividió el CMM en cuadrantes y se eligió el cuadrante I para desarrollar el modelo del mínimo de movimientos del caballo de ajedrez. El cuadrante I fue dividido a su vez en dos patrones distintos, que se denotaron como patrón alfa y patrón beta. Después se desarrolló un modelo que expresara los valores del campo del mínimo de movimiento para el patrón alfa (ecuación 3) y el patrón beta (4.3). Finalmente se procedió a unificar ambos modelos en uno solo (5.4) y se generalizó dicho modelo para el resto del CMM (5.5)

Es importante hacer notar que el modelo matemático funciona solamente cuando $h > 4$ y $g > 4$ y cuando $g > h$. En consecuencia a la hora de emplear el modelo matemático es necesario que se adapten las coordenadas recibidas (x, y) de manera que g adopte el valor entre (x, y) más grande y h el restante. Esto es posible gracias a la simetría del campo del mínimo de movimientos.

A lo largo de la investigación se aprendió, entre otras cosas, a diferenciar adecuadamente entre un número par e impar. Para ello se utilizó la expresión $(-1)^x$, de manera que si x era un número par el resultado fuera 1 y si x fuera un número impar el resultado fuera -1. Esto permitió unificar y simplificar el modelo de distintos patrones utilizando ecuaciones lineales, tal como se hizo para desarrollar la ecuación (1.1.3). La función suelo permitió extraer el residuo de las divisiones, que demostró ser vital para el desarrollo del modelo del patrón beta (4.1) y (4.3). Además, la función suelo fue determinante para desarrollar la ecuación especial (5.2) y (5.3) que permitieron unificar los modelos del patrón alfa y del patrón beta en un solo modelo.

En el estudio del campo del mínimo de movimientos se descubrió que posee una simetría en la que contiene cuatro ejes de simetría. Además, con el objetivo de analizar el CMM a gran escala el modelo fue utilizado para desarrollar un programa en Java. (Ver apéndice) Gracias al programa se pudo generar un CMM de 500x500. Este CMM fue ingresado a una hoja de cálculo en donde se le asignó un color a cada casilla, dependiendo de su tipo.

Debido a la forma octagonal que presenta el CMM a gran escala se concluyó que el movimiento geométrico a pequeña escala del caballo (se mueve a ocho vértices distintos, formando un octágono) se ve reflejado en el CMM a escalas gigantescas. Esto también lleva a concluir que el CMM es un fractal, considerando que un fractal es un conjunto matemático que puede gozar de auto similitud a cualquier escala, su dimensión no es entera o si es entera no es un entero normal. (Sánchez)

Finalmente, queda pendiente la demostración matemática que el modelo representa hasta el infinito el CMM y que el CMM se sigue generando de igual forma en el infinito. Además, resultaría interesante desarrollar un algoritmo computacional que genere el CMM para luego comparar esos valores con el CMM generado por el modelo desarrollado en esta investigación.

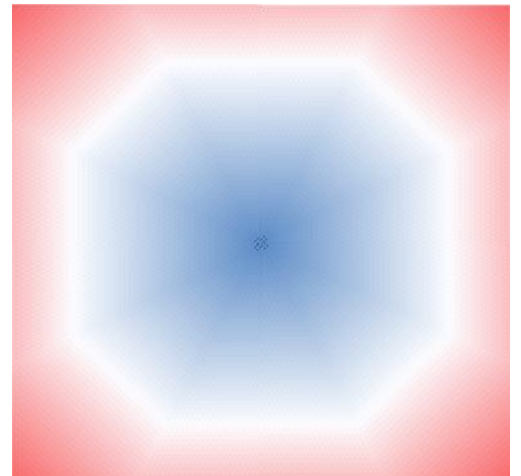


Figure 24: CMM con color. Nótese la forma octagonal

Apéndice

```
class CaballoAjedrez {
    public static int x = 10;
    public static int y = x;

    public static double minimo(double m, double n) {
        double a = m - ((2*n)-1.1);
        double partela = (0.5)*((a/Math.abs(a))+1);
        double b = m+(Math.pow(-1,m)*(-0.5))+0.5;
        double partelb = (b*0.5)-(Math.pow(-1, n)*0.5*Math.pow(-1, b*0.5))+Math.pow(-1, m)*0.5;

        double parte2a =(0.5)*(((-1*a)/Math.abs(a))+1);
        double r =(m+n)%3; //resto
        double parte2b =((-1)*Math.pow(-1, x)*((r-0.1)/Math.abs(r-0.1))+1)+m+n)/3 ;

        double tot = (partela*partelb)+(parte2a*parte2b);

        /*System.out.println(partela);
        System.out.println(partelb);
        System.out.println(parte2a);
        System.out.println(parte2b);
        System.out.println(c);*/
        return tot;
    }

    public static void main (String [] args){
        System.out.println(minimo(13,13));

        int[][] matriz = new int[x][y];
        for(int i=1;i<=x;i++){
            for(int z=1;z<=y;z++){
                if(i>z){
                    matriz[i][z]= (int) minimo(i,z);
                } else if(i==z){
                    matriz[i][z]= (int) minimo(i,z);
                } else{
                    matriz[i][z]= (int) minimo(z,i);
                }
            }
        }
        String rock ="";
        for(int i=1;i<=x;i++){
            rock = "";
            for(int z=1;z<=y;z++){
                rock = rock + "\t"+matriz[i][z];
            }
            System.out.println(rock);
            //System.out.println("");
        }
        System.out.println(minimo(5,5));
    }
}
```