

Fractales Tridimensionales

¿Cómo implementar fractales tridimensionales como método de filtrado para el Río Plátanos?

Área: Matemáticas
Número de palabras: 4093

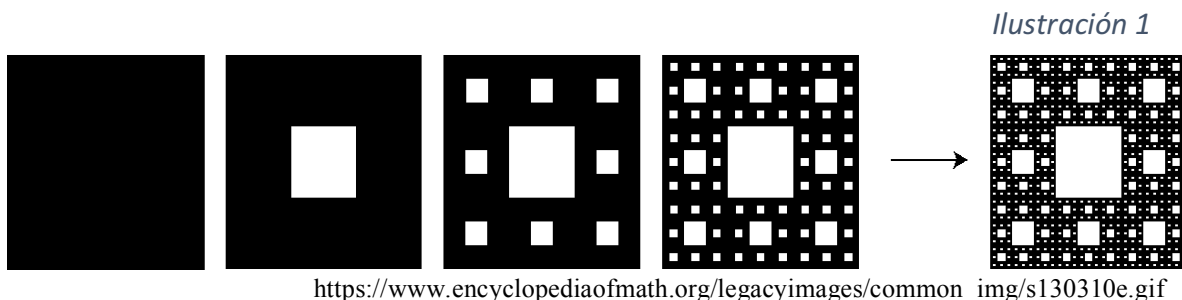
Índice

Contenido

Introducción	3
Desarrollo	7
Análisis del río	7
Análisis de Fractal.....	14
Creación de Fractal.....	18
Fractal como Filtro	24
Conclusiones	26
Bibliografía	28

Introducción

Los fractales guardan estrecha relación con las sucesiones aritméticas y geométricas infinitas. Estos elementos son definidos como «un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas»¹; en otras palabras es un polígono que se ve afectado del mismo modo de manera innumerable. La Alfombra de Sierpinski² se forma cuando a un cuadrado se le sustrae la novena parte que se sitúa en el centro del cuadrado al separarlo en nueve pedazos iguales, y repitiendo este patrón con los otros ocho cuadros más pequeños restantes, ejemplificado en la ilustración 1.³



Por ende, al ser la Esponja de Menger⁴ una versión tridimensional⁵ de la Alfombra de Sierpinski, el proceso por realizar para construir uno es el mismo, pero empleando cubos en lugar de cuadrados, haciendo que, independientemente de cual de las caras del “cubo” se escoja, se verá igual a la Alfombra de Sierpinski con el mismo numero de iteraciones. Ejemplificándose también en la ilustración 2.

¹ (Fractal, 2018)

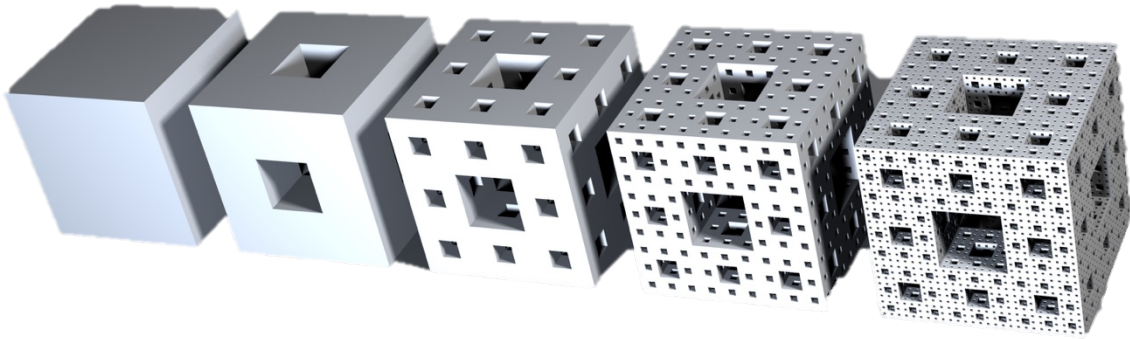
² (Waclaw Sierpinski, 1916)

³ (Sierpiński gasket, 2012)

⁴ (Karl Menger, 1926)

⁵ Que tiene tres dimensiones

Ilustración 2



<http://www.epsilones.com/material/curvas/035esponja-menger-sec-p.jpg>

Al contemplar la forma del fractal tridimensional sugiere la idea utilizar estos poliedros por sus propiedades para el filtrado de contaminantes del agua. Por tanto, conviene mencionar que la contaminación está definida como la adición de sustancias en un entorno desarrollado que altera su funcionamiento; esta problemática es un factor que afecta el correcto desempeño del planeta como ecosistema⁶.

La contaminación puede ser clasificada en diversas categorías, siendo designadas por la fuente de proveniencia del contaminante o por la forma en que este contaminante degrada su entorno⁷. Los principales tipos contaminantes son los que los humanos hemos añadido al ambiente, como residuos de desechos orgánicos y fecales o la gran cantidad de basura que se produce diariamente y que muchas veces no tratada adecuadamente.

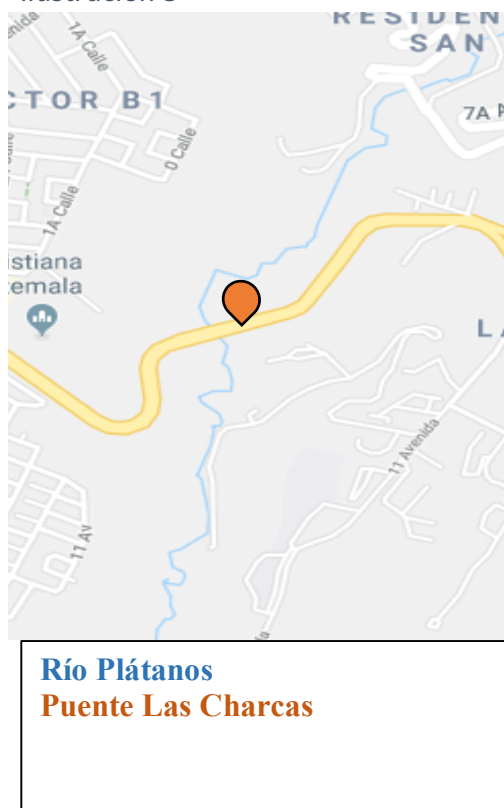
⁶ (Contaminación, 2018)

⁷ (Contaminación, 2018)

La contaminación en cuerpos de agua que se vive en Guatemala es verdaderamente preocupante. «*Los altos niveles de contaminación, incluso con metales pesados, hacen que el noventa y cinco por ciento del agua que se produce en Guatemala sea inutilizable* »⁸. Esto impacta en la vida de los 17 millones de guatemaltecos⁹, en especial de quienes viven de los cuerpos de agua. Día a día son más los ríos que quedan inutilizables. Este es el caso de el río plátanos; río que pasa entre los municipios de Mixco y Ciudad de Guatemala, ambos del departamento de Guatemala, Guatemala.

En la ilustración que se muestra a continuación se aprecia este río pasa por el área urbana y debajo del puente de las Charcas (lugar donde se realizó el análisis).

Ilustración 3



⁸ (Pérez Marroquín, 2017)

⁹ (Countrymeters, 2018)

El Río Plátanos es un río de aguas negras, y al estar sumamente contaminado, nadie se interesa por intentar o aligerar su carga de contaminantes; además, es uno de los afluentes que desemboca en el Lago de Amatitlán; lago que está fuertemente contaminado estimándose que el 90% del agua que alimenta este lago proviene de drenajes.

Por lo mencionado, la intención de este escrito es el análisis de empleo de fractales tridimensionales como mecanismo de filtrado¹⁰ del Río Plátanos, mecanismo que además de privar al río de desechos sólidos, aliviará la carga de desechos que llegan diariamente al Lago de Amatitlán.

Este mecanismo de filtrado consistiría en una “red” formada por numerosos fractales interconectados que crearán una “pared” transversal al afluente del río que será capaz de contener dichos residuos y facilitar su extracción.

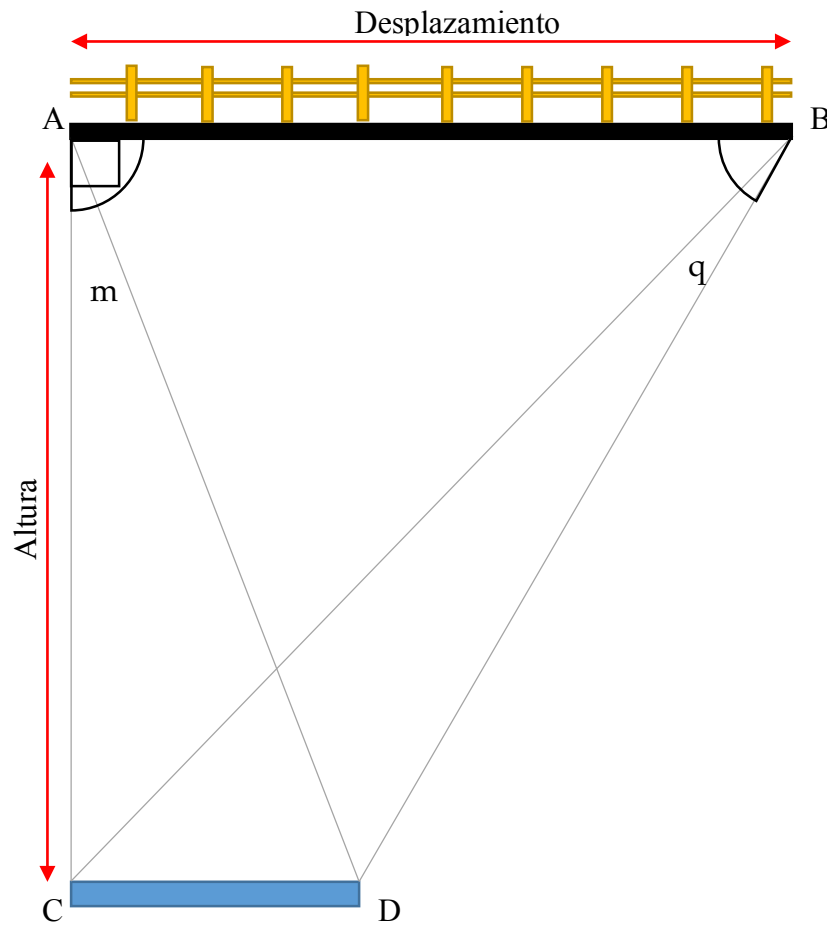
Para esto se calcularán las dimensiones del área transversal del río utilizando identidades trigonométricas para ayudar a resolver triángulos apoyándose en la ley de senos y cosenos. Así mismo se analizarán las propiedades de la esponja de Menger para crear un fractal que posea las características apropiadas para la filtración de agua y generar una propuesta óptima para la retención de desechos.

¹⁰ Mecanismo en el que pasa un líquido por un filtro para retener algunos componentes.

Desarrollo

Análisis del río

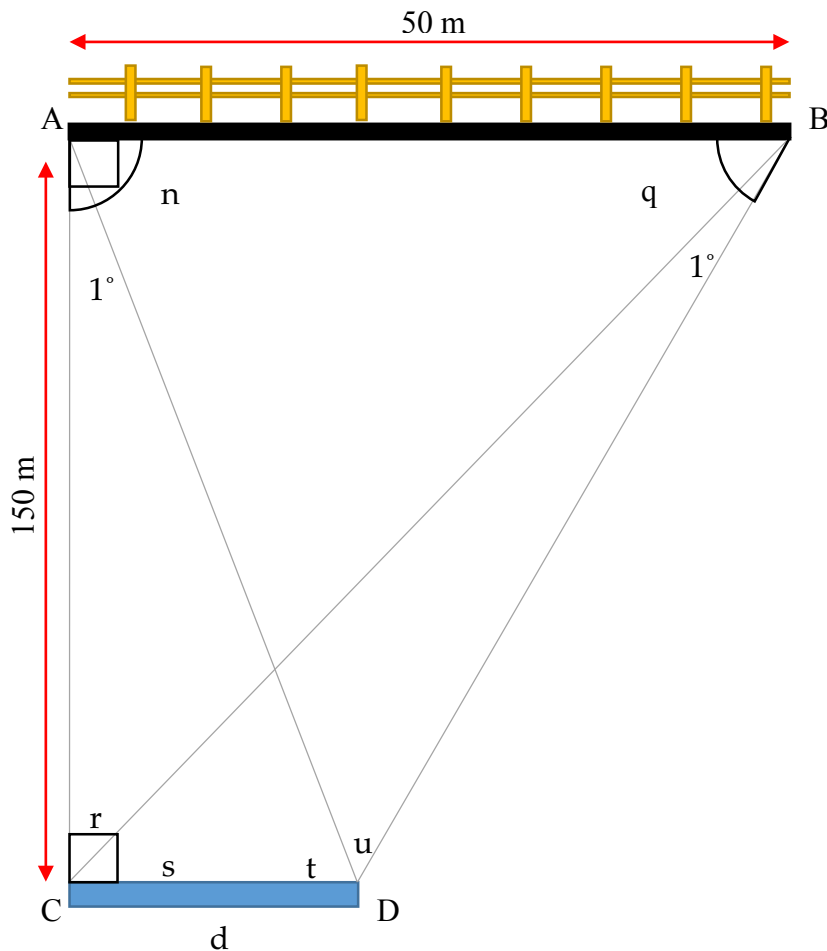
Según el plan propuesto se medirá el área transversal del río plátanos. A continuación, se muestra el bosquejo del puente y el río con las variables a medir.



Inicialmente se apuntó el láser desde el punto A hacia el punto C, donde se cuidó de que el nivel señalara 180° ; asegurando que el punto A estuviese directamente arriba del punto C. Luego de esto se apuntó el láser desde el punto A hacia el punto D; de este modo se obtuvo la medida de $\angle CAD$ (m).

Del mismo modo, desplazando el punto de referencia a B, 50m a la derecha de A, se midió el $\angle CBD$ (p); apuntando desde B hacia C y luego hacia D.

También se hizo una breve investigación para averiguar la altura del puente las charcas¹¹. De modo que se obtuvo el siguiente esquema; la medida de los ángulos no es muy precisa debido a la herramienta.



Se utilizó el axioma que establece que la suma de todos los ángulos internos de todo triángulo debe sumar 180° ¹²; tomado en cuenta lo anterior se calcularon los ángulos n , q , r , s , t y u como se explica a continuación.

¹¹ Cfr. Cumes, Willian.(29/04/2017). Hombre se suicida desde el puente San Cristóbal: Prensa Libre.

¹² (V postulado de Euclides, s. IV a.C.)

ΔACD tiene 1° de apertura en el $\sphericalangle CAD$, tiene un ángulo recto en ACD gracias a que el punto A está directamente sobre el punto C. Por el axioma se puede asegurar que el ángulo t se calcula de la siguiente forma:

$$t = 180^\circ - 90^\circ - 1^\circ$$

$$t = 89^\circ$$

ΔABC tiene un ángulo recto en BAC y el ángulo q medido de 72° . Por lo que al aplicar el axioma se obtiene:

$$r = 180^\circ - 90^\circ - 72^\circ$$

$$r = 18^\circ$$

Por último el ΔBCD , cuyo $\sphericalangle CBD$ mide 1° . Suponiendo que el puente es paralelo al río, y sabiendo que entre el puente y la recta $\overline{BC}$ hay 72° , por el axioma de ángulos alternos internos sabemos que el ángulo s también es de 72° . Y al emplear el axioma de 180° se obtiene:

$$t + u = 180^\circ - 1^\circ - 72^\circ$$

$$t + u = 107^\circ$$

Ya teniendo los ángulos solo hace falta aplicar la ley de senos que se muestra a continuación

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Con el primero de los triángulos descritos se puede obtener directamente el ancho del río denominado “ d ” aplicando la ley de senos.

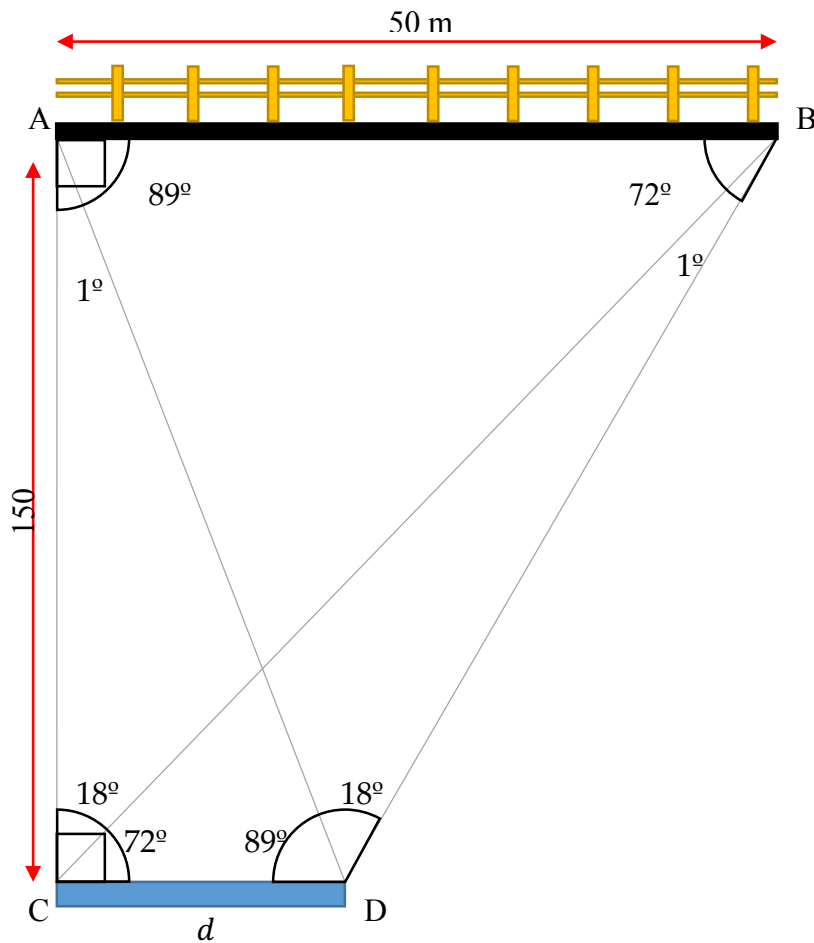
$$d = \frac{150[m] \text{ sen}(1^\circ)}{\text{sen}(89^\circ)} = 2.6183[m]$$

También se puede encontrar la longitud de $\overline{BC}$; y en base a $\overline{BC}$ obtener d .

$$\overline{BC} = \frac{150[m] \operatorname{sen}(90^\circ)}{\operatorname{sen}(72^\circ)} = 157.7193[m]$$

$$d = \frac{x[m] \operatorname{sen}(1^\circ)}{\operatorname{sen}(107^\circ)} = 2.8784[m]$$

A continuación se muestra el diagrama con los datos ya calculados.



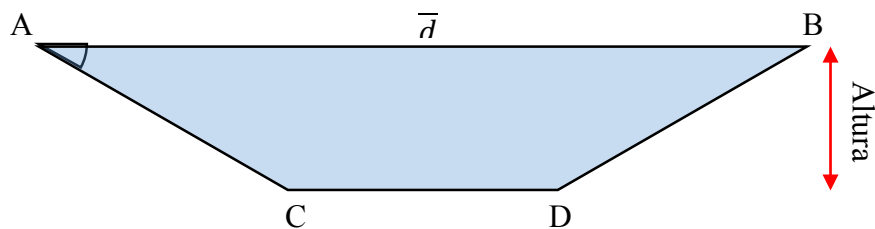
Con los procedimientos anteriores se obtuvieron dos diferentes resultados para el ancho del río. Esta diferencia es causada por la falta de precisión de la herramienta de medición empleada para obtener los ángulos, por lo que se hizo un

promedio entre los datos obtenidos; al promedio se le llamará $\bar{d}$. siendo estos 2.8855m y 2.6183m; los cuales, ya promediados, resultaron en 2.7519m.

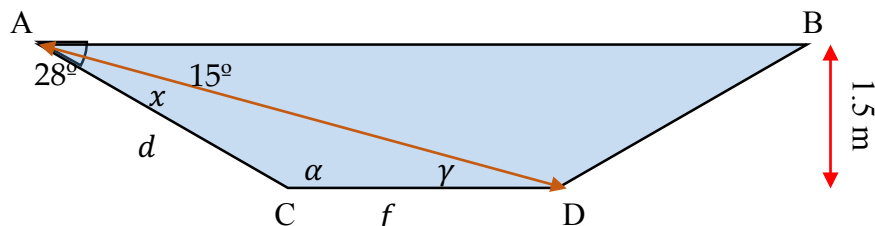
$$\bar{d} = \frac{2.8855[m] + 2.6183[m]}{2}$$

$$\bar{d} = 2.7519[m]$$

Como lo que se pretende hacer es un tipo de red, hace falta obtener el área transversal del cauce del río. Área definida por el trapecio ABDC con ancho superior $\overline{AB} = \bar{d}$ como se muestra en el siguiente diagrama



Para hallar el área del trapecio ABDC se midió el ángulo de depresión ($\sphericalangle BAC$) que tiene el cauce el cual midió 28° . También se midió la pendiente entre la superficie horizontal del cauce y el punto D, lo que resultó en que el $\sphericalangle BAD$ con amplitud de 15° . Sabiendo la gradiente a ambas esquinas del fondo del cauce (los puntos C y D) y que el río tiene una profundidad máxima de 1.5m antes de desbordarse según su geometría se construye el siguiente diagrama.



Sabiendo que el $\angle BAD$ y el $\angle DAC$ (x) en conjunto forman el $\angle BAC$, y sabiendo que este último mide 28° y el $\angle BAD$ mide 15° ; se puede obtener la medida del ángulo x por medio de una simple resta:

$$x = 28^\circ - 15^\circ$$

$$x = 13^\circ$$

Por el axioma que establece que los ángulos internos de todo triángulo deben sumar 180° , se sabe que el ángulo α debe tener un valor de 152° .

$$\alpha = 180^\circ - 13^\circ - 15^\circ$$

$$\alpha = 152^\circ$$

Primeramente se calculará el valor de d . Para hallar su longitud no hará falta más que aplicar la siguiente propiedad trigonométrica:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Siendo $\theta = 28^\circ$ y el lado opuesto la altura del cauce:

$$\text{sen } (28^\circ) = \frac{d[m]}{1.5[m]}$$

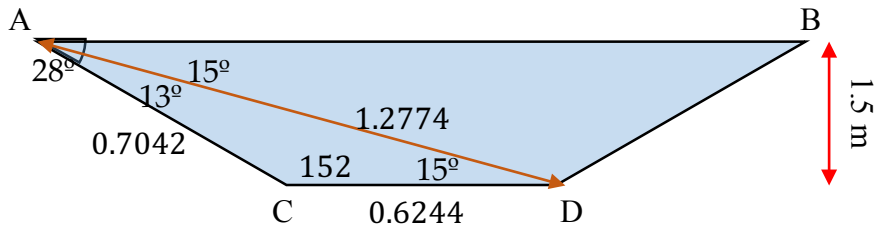
$$d = (1.5[m])\text{sen } (28^\circ)$$

$$d = 0.7042[m]$$

Teniendo ya el valor de d podemos obtener el valor de la línea naranja, $\overline{AD}$, por medio de la ley de senos:

$$\overline{AD} = \frac{0.7042[m]\text{sen}(152^\circ)}{\text{sen}(15^\circ)}$$

$$\overline{AD} = 1.2774^\circ$$



Al tener los valores de las distancias de la superficie del río y la longitud $\overline{AD}$ y el $\sphericalangle BAD$ podemos emplear la ley de cosenos.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos(C)$$

$$f^2 = 0.7042[m]^2 + 1.2774[m]^2 - 2 (0.7042[m]) (1.2774[m]) \cos(15^\circ)$$

$$f^2 = 0.3898[m^2]$$

$$f = 0.6244[m]$$

Teniendo claras ya las medidas de los segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ del trapecio ABDC, se puede proseguir a obtener el área del trapecio.

$$A_{\text{trapecio}} = \left(\frac{\overline{d} + f}{2} \right) h$$

$$A = \left(\frac{2.7519[m] + 0.6244[m]}{2} \right) 1.5[m]$$

$$A_{\text{trapecio}} = 2.5322 [m^2]$$

Se puede concluir que se debe cumplir con una “red” de fractales que cubran un área de 2.5m cuadrados.

Análisis de Fractal

Lo que resulta interesante de los fractales de Sierpinski, entiéndase el Triángulo de Sierpinski¹³ y la Alfombra de Sierpinski, es su propiedad de carencia de área. implicando que, en un plano bidimensional, existen figuras que no tienen dimensiones suficientes como para ser alojadas por el mismo. Esto porque la finalidad de un plano bidimensional es alojar figuras bidimensionales¹⁴, lo que se traduce como figuras con un área designada. Pero, el área de la figura luego de la infinitésima iteración es un número con una cantidad incuantificable de ceros entre el punto decimal y las cifras significativas del número mismo entonces es equiparable a 0.

La Esponja de Menger también cuenta con aspectos un tanto peculiares. Durante el análisis realizado a este fractal se encontró que su volumen¹⁵ tiende a 0, similar a lo que sucedía con el área de la Alfombra de Sierpinski. Esto implica que es una figura tridimensional que carece de volumen. Sin embargo, lo que resulta verdaderamente fascinante es el hecho de que el área superficial¹⁶ del poliedro tiende a ser infinita.

Para comprobarlo, primero se debe esclarecer que se tomó como U_0 el cubo sin iteraciones, teniendo un volumen de ∂^3 siendo " ∂ " la longitud de una arista, y como U_1 el cubo habiendo sido iterado una vez. En este cubo se divide cada cara en nueve cuadrados más pequeños, lo que resulta en 27 cubos con una anchura de una

¹³ (Waclaw Sierpinski, 1916)

¹⁴ Que se representa según su altura y su anchura, y no su profundidad

¹⁵ Espacio que ocupa un cuerpo

¹⁶ es una medida del área total que ocupa la superficie del objeto

tercera parte de ∂ . Como se pretende replicar la imagen de la Alfombra de Sierpinski en cada cara del cubo, se deben sustraer seis de los veintisiete cubos de menor ancho, siendo cada uno de estos el cubo central de las seis caras del cubo original. Además, se debe sustraer un séptimo cubo de lado ∂ -tercios, siendo este el núcleo del cubo original.

Esto hace que el volumen del cubo iterado una vez, o U_1 , sea $\left(\frac{20}{27}\right)\partial^3$; o en su defecto $\partial^3 - \left(\frac{7}{27}\right)\partial^3$. Si se analiza de manera más abstracta, la iteración realizada es como retirar las filas centrales de cada eje, entiéndase eje x, eje y y eje z, aunque se estaría sustrayendo dos veces demás el cubo de lado ∂ -tercios central del cubo de lado ∂ de la siguiente forma:

$$U_1 = \partial^3 - [(3)(1) + (3 - 1)(1)(2)]\left(\frac{\partial}{3}\right)^3$$

En la anterior fórmula el ∂^3 al inicio representa el volumen que inicialmente tenía, volumen al que se restará lo demás. La multiplicación $(3)(1)$ representa la única fila central de un eje a la cual se le pueden retirar 3 cubos pequeños y el 1 la única fila que se retira por cada cara, razón por la que se incluye el (1) en la fórmula poco más adelante. Al sustraer la fila de tres cubos pequeños de un eje, se quita también un cubo pequeño de las filas centrales $(3 - 1)(1)$ de los otros dos ejes (2). Y todos estos cubos que se sustraen $[(3)(1) + (3 - 1)(1)(2)]$ tienen un volumen de $\left(\frac{\partial}{3}\right)^3$.

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \partial^3 - [(3)(1) + (3-1)(1)(2)] \left(\frac{\partial}{3}\right)^3 = \partial^3 - [(3) + (2)(2)] \left(\frac{\partial}{3}\right)^3 \\
 U_1 &= \partial^3 - [(3) + (4)] \left(\frac{\partial}{3}\right)^3 = \partial^3 - 7 \frac{\partial^3}{27} \\
 U_1 &= \frac{20}{27} \partial^3
 \end{aligned}$$

Del mismo modo sucede con el segundo elemento de la sucesión, U_2 . El proceso se repite, ahora en cada uno de los 20 cubos de lado $\left(\frac{\partial}{3}\right)$. Esto se puede describir con la formula siguiente:

$$\left\{ [(3)(1) + (3-1)(1)(2)] \left(\frac{\partial}{9}\right)^3 \right\} (20)$$

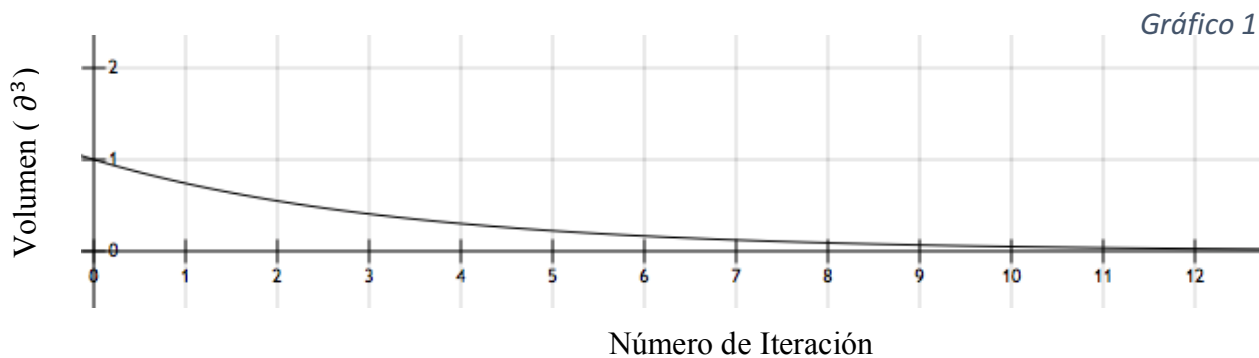
Por lo tanto, para hallar el volumen del cuerpo en la segunda iteración hace falta restar los cubos de lado $\partial/9$, que serían los incluidos en la formula recién descrita, al volumen obtenido en la primer iteración. Esto resulta en la fórmula:

$$U_2 = \partial^3 - [(3)(1) + (3-1)(1)(2)] \left(\frac{\partial}{3}\right)^3 - \left\{ [(3)(1) + (3-1)(1)(2)] \left(\frac{\partial}{9}\right)^3 \right\} (20)$$

Si se escriben los tres elementos, U_0 , U_1 y U_2 , de manera recursiva se puede percibir el patrón entre estos, patrón que denotará cual es la razón de la sucesión.

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \partial^3 = 1 * \partial^3 = 20^0 * \left(\frac{\partial}{3^0}\right)^3 \\
 U_1 &= \frac{20}{27} \partial^3 = 20 * \frac{\partial^3}{27} = 20 * \left(\frac{\partial}{3}\right)^3 = 20^1 * \left(\frac{\partial}{3^1}\right)^3 \\
 U_2 &= \frac{400}{729} \partial^3 = 400 * \frac{\partial^3}{729} = 400 * \left(\frac{\partial}{9}\right)^3 = 20^2 * \left(\frac{\partial}{3^2}\right)^3
 \end{aligned}$$

Como es evidente la razón con la que decrece el valor del volumen del cuerpo es de $\frac{20}{27}$, por lo que se establece que, para hallar el n -ésimo término de la sucesión, ha de usarse la fórmula $U_n = U_1 r^{n-1}$. Como se pretende encontrar el infinitésimo término se desarrolla la ecuación $U_\infty = U_1 r^{\infty-1}$. El elevar la razón al infinito, al ser esta menor a 1 y mayor a 0, es equiparable a 0, por tanto $U_\infty = U_1 * 0$ y, por la ley multiplicativa del 0, U_∞ es igual a 0. Entonces, el volumen tras la infinitésima iteración es nulo, también demostrado en el grafico a continuación:



En cuanto al área superficial de la figura, esta en U_0 es, como en todo cubo, es seis veces el área de cualquiera de sus caras, área que por definición sería ∂^2 . Sin embargo, luego de la primer iteración la figura va a consistir de veinte cubos de lado $\frac{\partial}{3}$, de los cuales el área por cada cara es de $\frac{\partial^2}{9}$; ocho de los cuales cumplen una función de esquina teniendo tres de sus seis caras expuestas 8(3) y los doce cubos restantes, haciendo por conectores entre los ocho que funcionan como esquina, tienen cuatro de sus seis caras expuestas 12(4). Esto indica que la fórmula del área superficial tras la primera iteración es de:

$$A_1 = [(8 * 3) + (12 * 4)] * \frac{\partial^2}{9} = 72 * \frac{\partial^2}{9} = 8 \partial^2$$

Esto deja ver que tras la primera iteración, el área superficial del poliedro se ha octuplicado. Teniendo en cuenta esto, es evidente que al iterar el cuerpo infinitas veces el área superficial de la figura se va a octuplicar infinitas veces, por lo que es evidente que el área superficial de este fractal tridimensional es infinita.

Estas propiedades aparentan ser ideales para elementos de filtrado, ya que al tener un volumen nulo evita el malgasto del espacio y el que el área superficial del cuerpo sea infinita implica que el área de contacto con el agua sería infinita, cosa que da certeza de un filtrado irreplicable. Sin embargo, los espacios vacíos residuales de la primer iteración son muy grandes, lo que implica que el agua pasaría por estos espacios en vez de donde la filtración sería eficaz.

Creación de Fractal

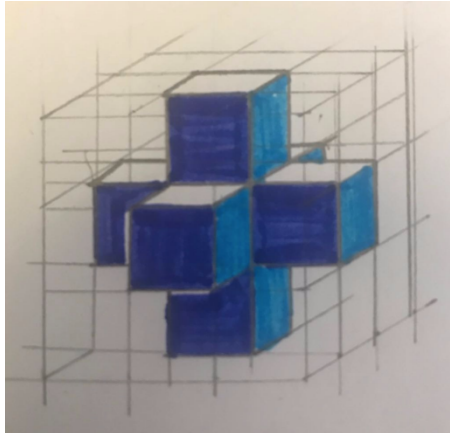
Esto llevó a idear un fractal propio que cumpliría con tener un área superficial infinita, propiedad que le brindaría al fractal un gran potencial como elemento de filtrado. Este fractal sería la versión inversa de la Esponja de Menger; en otras palabras, sería la sucesión de figuras que se forman al ir sumándose el volumen retirado de la Esponja de Menger. Esto implica que $U_0 = 0$ ya que U_0 de la Esponja de Menger es el volumen de un cubo de dimensiones ∂^3 , por lo que aún no ha sido sustraído volumen del cubo. $U_1 = \left(\frac{7}{27}\right)\partial^3$ esto porque sabemos que este fractal tendrá un volumen que, al complementarse con el volumen de la Esponja de Menger en el mismo número de iteración o U_n , suman un volumen de ∂^3 . Estableciendo esta relación se puede decir con certeza que el infinitésimo elemento de la sucesión tendrá un volumen de ∂^3 . Sin embargo, se debe comprobar que esto es cierto. Para esto se debe averiguar el volumen del siguiente elemento de la sucesión. Este tendría un volumen de $\frac{329}{729}\partial^3$. Con este volumen ya podemos averiguar cual es la razón

ingresando los datos a la fórmula: $r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$, la cual resulta en que la razón es de $\frac{7}{27}$ y por lo tanto se obtiene que la formula del volumen para cualquier elemento de la sucesión:

$$U_n = V = 1 - \left(\frac{20}{27}\right)^n$$

En cuanto al área superficial de la figura, cabe sugerir el que, como se observó en la Esponja de Menger, esta crecerá de manera exponencial como ya que comparte todas las caras “internas” con este cuerpo cuya área superficial ya se corroboró crece infinitamente. Sin embargo, debemos comprobar esta idea. Para esto emplearemos la fórmula de designada para la razón, descrita anteriormente como: $r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$. Para esto se necesitan dos datos de la sucesión, pero en esta ocasión no podemos utilizar U_0 ya que $U_0 = 0$ y al intentar sacar la razón resultaría en la división de $r = \frac{U_1}{U_0}$. Se dice que U_0 es cero porque tiene un valor tan insignificante y pequeño que se le puede equiparar. Por tanto, no se puede hallar la razón con U_0 y U_1 , esto porque la fracción es un número indefinido por estar dividido entre cero. Para encontrar la razón habrá que saber el valor de U_1 y de U_2 . Se sabe que, tras la primera iteración, U_1 , el fractal estará compuesto por siete de veintisiete cubos de lado $\frac{\partial}{3}$ dispuestos de modo en que forman una clase de signo de suma ejemplificado en la ilustración 4.

Ilustración 4



Probia autoría

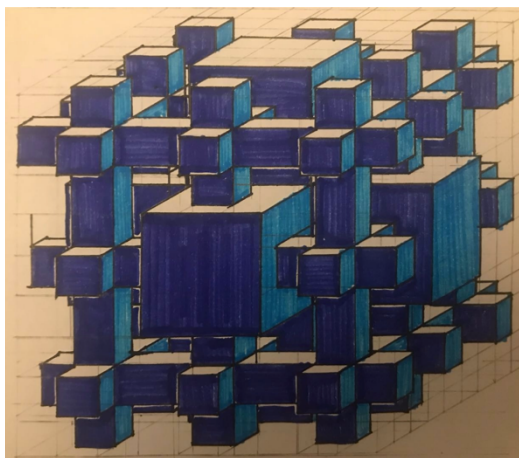
Esta figura está formada por un cubo “nuclear” cuyas seis caras están cubiertas por otros seis cubos. Los seis cubos que encierran al cubo “nuclear” tienen cinco de sus caras expuestas, debido al que hacen contacto con el cubo “nuclear” con una. Gracias a esto se puede decir que el área superficial de U_1 , A_1 , es:

$$A_1 = (6 * 5) \left(\frac{\partial}{3}\right)^2 = \frac{30}{9} \partial^2 = \frac{10}{3} \partial^2$$

La segunda iteración es más compleja ya que se forman versiones más pequeñas del ilustrado en la imagen y se colocan en los veinte espacios inutilizados de la primer iteración; resultando en la ilustración 5, que imita la forma del coloreado de la imagen previa¹⁷.

¹⁷ blanco lo que se vería desde una perspectiva aérea, celeste lo que se vería desde una perspectiva lateral y azul lo que se vería desde una perspectiva frontal

Ilustración 5



Propia autoría

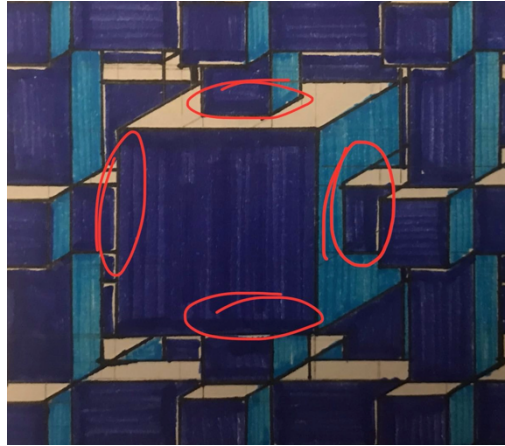
Analizando la figura se pueden señalar propiedades. Una de estas es que ahora se tiene la figura de U_1 dentro de los bordes generados en U_2 . Esto hace que en cada uno de los de los cubos que rodean al cubo “nuclear” se creen, en cuatro de las cinco caras expuestas, puntos de contacto con las figuras agregadas en la segunda iteración.

Por tanto, esto implica que el área superficial de U_2 , A_2 , será:

$$A_2 = A_1 - (\text{área de contacto } U_1 \text{ y } U_2) + (\text{área superficial nueva})$$

El “área de contacto U_1 y U_2 ” sería el total de área que está en contacto entre las iteraciones, resaltados en la ilustración 6. Ya que se sabe que cada uno de los seis cubos que rodean al cubo “nuclear” tienen cuatro puntos de contacto y que cada uno de esos puntos de contacto tiene el área que encierra un cuadrado de lado $\frac{\partial}{9}$; se establece que el área de contacto entre U_1 y U_2 es: $(6)(4)\left(\frac{\partial}{9}\right)^2$

Ilustración 6



Propia autoría

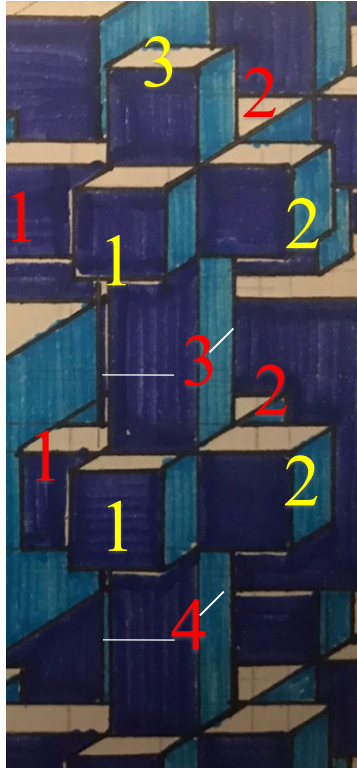
Otro aspecto a resaltar es que, de las veinte figuras agregadas, ocho hacen función de “esquina” y los doce restantes son “conectores”. Además, gracias a la ilustración 7 se puede apreciar el que las figuras de “esquina” tienen, de los seis cubos que encierran al cubo “nuclear”, tres con cinco caras expuestas¹⁸ y los otros tres con cuatro caras expuestas¹⁹. Por otro lado, aquellos que funcionan como “conectores” denotan el que solo dos de los seis cubos tienen cinco caras expuestas y los otros cuatro cubos tienen cuatro caras expuestas. Esto da cabida a decir que el “*área superficial nueva*” será :

$$[8(3 * 4 + 3 * 5) + 12(4 * 4 + 2 * 5)] \left(\frac{\partial}{9}\right)^2$$

¹⁸ numeradas con amarillo

¹⁹ numeradas con rojo

Ilustración 7



Propia autoría

Por extensión, la fórmula del área superficial de U_2 es:

$$A_2 = A_1 - \left[(6)(4) \left(\frac{\partial}{9} \right)^2 \right] + \left\{ [8(3 * 4 + 3 * 5) + 12(4 * 4 + 2 * 5)] \left(\frac{\partial}{9} \right)^2 \right\}$$

$$A_2 = \frac{10}{3} \partial^2 - \frac{8}{27} \partial^2 + \frac{176}{27} \partial^2 = \frac{86}{9} \partial^2$$

Ya teniendo los valores de ambos elementos, se ingresan a la fórmula de la razón.

$$r = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{86}{9} \partial^2}{\frac{10}{3} \partial^2} = \frac{43}{15} \partial^2$$

Ya habiendo obtenido los valores de A_1 y la razón podemos averiguar el área que tendría el fractal en la infinitésima iteración.

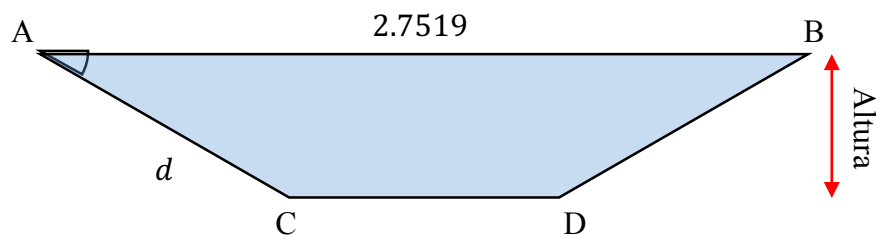
$$A_\infty = A_1 r^\infty = \frac{10}{3} \partial^2 * \left(\frac{43}{15} \right)^\infty = \infty$$

El área resulta ser infinita, justo como se había predicho, ya que si un número mayor a 1 es elevado al infinito, este crecerá de manera incalculable llegando a ser infinito.

Fractal como Filtro

Teniendo en cuanto el área transversal del afluente, sería prudente que ∂ midiera 0.75cm. Esto debido a que dejaría un excedente de aproximadamente 1.9mm en la fila inferior y 3.3mm en la fila superior. Debido a que se deben cubrir los 1.5m de altura que tiene el cauce en su parte más profunda, habrá 200 filas apiladas una sobre la otra. De estas filas, la inferior, contará con 83 fractales, número que aumentará paulatinamente hasta llegar a la fila superior, fila que consistirá en 363 fractales. Conclusiones a las que se llegaron tras realizar el análisis a continuación.

Primeramente, se debe tener en cuenta el que la primera fila de fractales no estará sobre la superficie, sino debajo de esta; por lo tanto, el espacio a cubrir ya no será de 2.7519m. Para esto se empleará la ley de senos retomando el esquema del cauce del río.



Como sabemos cuánto mide d y tenemos su ángulo de inclinación podemos medir cuanto va a cambiar, o reducirse la superficie del río, a medida que reducimos la altura. Como lo que se pretende es reducirlo 0.75cm será el lado opuesto el que se reemplazará por el valor de 0.0075m.

$$\Delta x = \frac{0.0075[m] \operatorname{sen}(62^\circ)}{\operatorname{sen}(28^\circ)} = 0.01411[m]$$

Y del mismo modo para el lado opuesto.

$$\Delta x = \frac{0.0075[m] \operatorname{sen}(58^\circ)}{\operatorname{sen}(32^\circ)} = 0.012003[m]$$

Se sustrajo estas distancias de los 2.7519m de la superficie y se obtuvo que la distancia a cubrir sería de 2.7258m. Distancia que se dividió en segmentos de 0.0075m dejando ver que cabrían hasta 363 fractales unidos unos con otros y dejando un excedente de 0.0033m. Del mismo modo, la distancia del fondo se dividió en segmentos de 0.0075m, cosa que permitió ver que cabrían 83 fractales con un sobrante de 0.0019m.

Conclusiones

Por medio de esta investigación se pudo llegar a la conclusión de que el emplear fractales como método de filtrado es, en realidad, factible. Esto porque, como se presento en el desarrollo de la monografía, se puede crear un fractal que no ocupe mucho espacio, en cuanto a volumen, y tenga un área superficial muy extensa, como es el caso de la Esponja de Menger que tiene un volumen nulo y un área superficial infinita. Característica que permitiría que el fractal tenga un gran potencial de filtrado.

El fractal diseñado carece de grandes orificios, como los poseídos por la esponja de Menger, por medio de los cuales elementos solidos de mediano tamaño podrían pasar. Sin embargo tampoco cuenta con su cualidad de carecer de volumen ya que el fractal creado tiende al volumen de un cubo de lado ∂ .

Lo que mas impacta sobre este trabajo es el ser capaz de ejemplificar y ver lo inmersa que están las matemáticas en nuestra realidad, o inclusive podría decir, lo inmersa que está nuestra realidad en las matemáticas. Esto último porque por medio de las matemáticas, personas han sido capaces de crear objetos que son implasmables en nuestra realidad, como lo sería un cuerpo que tenga tres dimensiones pero en realidad no ocupe espacio alguno y que este mismo cuerpo tenga un área superficial infinita; características que no concuerdan ni existen en la realidad en la que vivimos. También es resaltante como como, mediante unos pocos datos apenas relacionados con el ancho del río (como lo son la altura del puente, la distancia entre los puntos desde los que se midieron los ángulos de apertura entre dos líneas que convergían en las orillas del río y los ángulos de apertura mencionados, se pude llegar a tener datos muy precisos, este no fue el caso de mi trabajo, sin embargo se expresa que se debió a la falta de exactitud y precisión al

momento de realizar las mediciones), por medio de herramientas matemáticas, fui capaz de llegar a obtener el valor del mismo. debido a que es resaltable como, por medio de unos pocos datos, como lo son la altura del puente, la distancia entre los puntos desde los que se midieron los ángulos de apertura entre dos líneas que convergían en las orillas del río y los ángulos de apertura mencionados, se pude llegar a tener datos muy precisos. Este no fue el caso de mi trabajo, sin embargo se expresa que se debió a la falta de exactitud y precisión por parte mía y de la herramienta empleada para realizar las mediciones.

Bibliografía

Amna Adnan (18 de junio de 2010). «Effects of genetic pollution in plants and animals» (en inglés). Consultado el 30 de septiembre de 2011. Recuperado de <https://www.biotecharticles.com/Issues-Article/Effects-of-Genetic-Pollution-in-Plants-and-Animals-142.html>

Pérez Marroquín, César.(07/08/2017). El 95% del agua se desperdicia en Guatemala debido a la contaminación ambiental: Prensa Libre. Recuperado de <https://www.prensalibre.com/ciudades/guatemala/el-95-del-agua-se-desperdicia-en-guatemala-debido-a-contaminacion-ambiental>

Epsilones.(04/07/2002). Alfombra de Sierpinski: Página + o - matemática de Alberto. Recuperado de <http://www.epsilones.com/paginas/curvas/curvas-034-alfombra-sierpinski.html>

MANDELBORT, Benoit. *La Geometría Fractal de la Naturaleza*, Tusquets, ISBN 84-8310-549-7

Gonzalo "BatchDrake" Carracedo.(12/01/2009). El área del Triángulo de Sierpinski: Altair. Recuperado de <https://batchdrake.wordpress.com/2009/01/12/el-area-del-triangulo-de-sierpinski/>

Magzul, Fernando.(18/03/2018). Agua que ingresa al lago de Amatitlán es 90 por ciento de drenajes: Prensa Libre. Recuperado de <https://www.prensalibre.com/guatemala/comunitario/agua-que-ingresa-al-lago-de-amatitlan-es-90-por-ciento-de-drenajes>

Población de Guatemala: Countrymeters. Recuperado de <https://countrymeters.info/es/Guatemala>

Cumes, Willian.(29/04/2017). Hombre se suicida desde el puente San Cristobal: Prensa Libre. Recuperado de <https://www.prensalibre.com/guatemala/justicia/hombre-se-suicida-lanzandose-del-puente-san-cristobal>