Sistema de ecuaciones paramétricas para describir la gráfica formada por el movimiento de la recta que une la Tierra y Venus

“Confirmo que soy el autor de este trabajo y que no he recibido más ayuda de la permitida por el Bachillerato Internacional. He citado debidamente las palabras, ideas o gráficos de otras personas, se hayan expresado estos de forma escrita, oral o visual”.

Contenido

Introducción

Recientemente, en la revista científica *Nature Astronomy* se publicó una investigación que muestra la existencia del gas fosfina en la atmósfera del planeta Venus. Este descubrimiento ha causado gran asombro dentro de la comunidad científica, pues el origen de este gas es inexplicable y podría ser un indicio de la existencia de vida en dicho planeta.

Este tema me interesó mucho e investigando con profundidad sobre este planeta, encontré una imagen titulada “La Danza de la Tierra y Venus”, que llamó mucho mi atención:

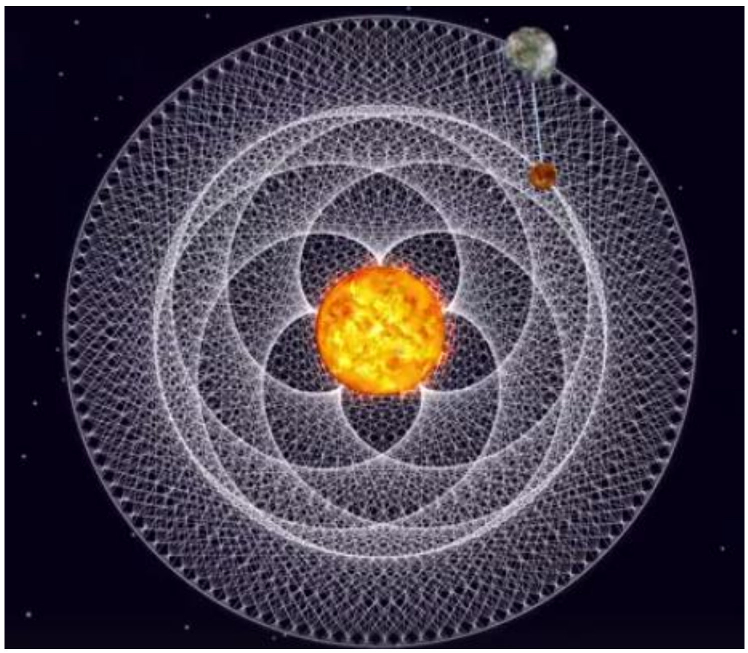


Ilustración 1: La Danza de la Tierra y Venus (Henderson, 2019).

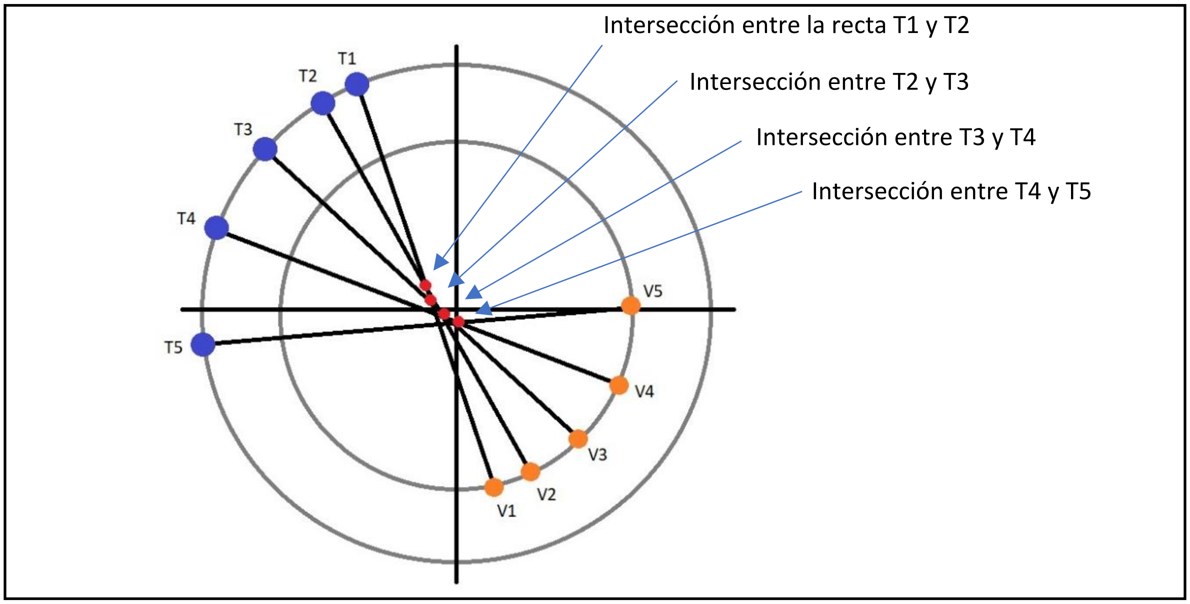
Esta imagen muestra el patrón que se crea al graficar una recta entre la Tierra y Venus en función del tiempo mientras orbitan alrededor del sol. Es importante remarcar que este es un modelo idealizado del sistema solar que considera que los planetas se mueven a una velocidad angular constante y que sus órbitas son perfectamente circulares cuyo centro es el sol.

Me percaté que el patrón de la órbita interior está dado por una serie de curvas que forman figuras parecidas a corazones. Investigando sobre esto encontré que estas figuras se llaman cardiodes, los cuales son representados fácilmente con coordenadas polares.

Debido a que las coordenadas polares no son parte del programa de estudios, el objetivo de esta exploración es encontrar un sistema de ecuaciones paramétricas con coordenadas cartesianas que describa el patrón creado en el interior de la órbita de Venus. Para lograr esto, considerando el modelo ideal del sistema solar, se definirán ecuaciones para la posición de los planetas en función del tiempo y, con ellas, se trazarán líneas entre ellos. Luego, se definirán las ecuaciones paramétricas para la posición de los puntos de intersección entre las rectas y, finalmente, se comprobarán estas ecuaciones graficándolas con datos reales.

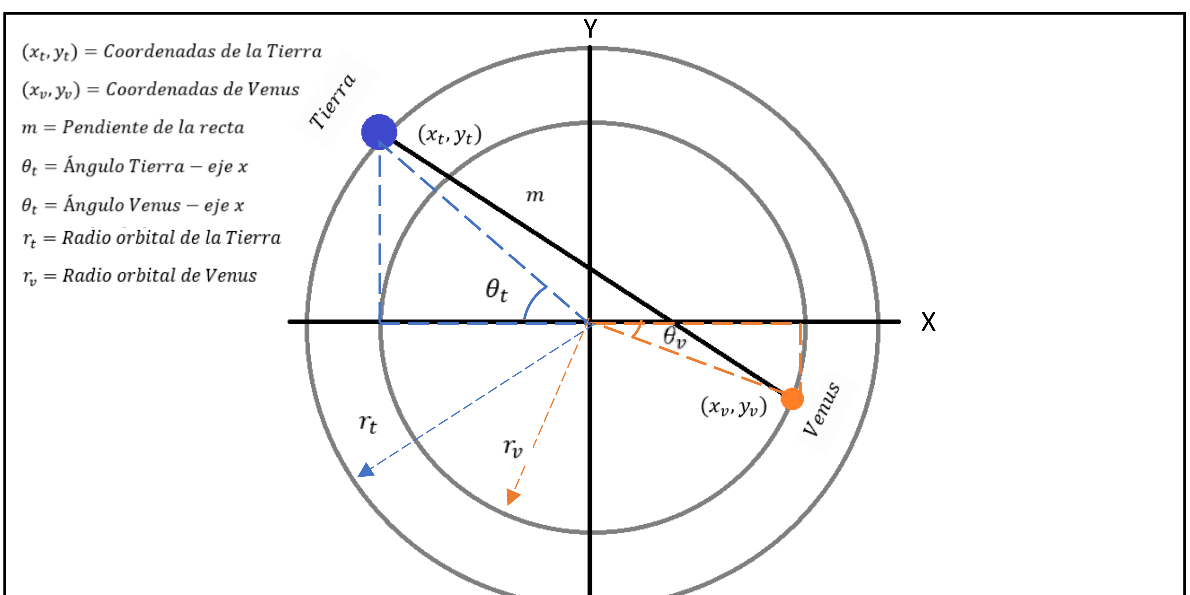
Desarrollo

Viendo una animación en cámara lenta de la *Ilustración 1*, me di cuenta de que los cardiodes se formaban a partir de una gran cantidad puntos de intersección entre las rectas trazadas en un momento dado y las rectas trazadas inmediatamente después. En la siguiente gráfica se muestra la explicación de este concepto, los puntos de intersección (en rojo) entre la recta trazada en un determinado tiempo y la recta trazada en un tiempo inmediatamente después al anterior van formando una especie de curva y, al considerar una cantidad infinita de puntos de intersección, se dibujarían infinitos cardiodes.



Gráfica 1. Gráfica con fines ilustrativos, no a escala. Los puntos azules representan la posición de la Tierra y los naranjas la de Venus en los tiempos arbitrarios "1, 2, 3, 4 y 5".

Para poder encontrar los puntos de intersección, primero se debe encontrar las ecuaciones de las rectas. Considerando un plano cartesiano en el cual el centro de las órbitas de los planetas es el origen (representando el sol), en un tiempo dado *T*, la posición de los planetas se puede dar como un par de coordenadas (x, y) a partir de las cuales se puede trazar una recta.



Gráfica 2: posiciones de ambos planetas en un tiempo T específico. Gráfica con fines ilustrativos, no a escala.

Utilizando funciones trigonométricas se encontraron las coordenadas de los planetas en función del ángulo θ que forman con el eje x, en donde r_t y r_v son los radios de las órbitas de la Tierra y Venus respectivamente:

$$x_t = r_t \cos\theta_t \qquad x_v = r_v \cos\theta_v$$

$$y_t = r_t \sin\theta_t \qquad y_v = r_v \sin\theta_v$$

El ángulo que los puntos forman es desconocido, sin embargo, este se puede dar en términos de la velocidad angular $\left(\frac{rad}{s}\right)$ y del tiempo (s), los cuales son datos que sí se conocen.

$$\theta = wT$$

Haciendo la sustitución anterior, se obtienen las ecuaciones de las coordenadas en función del tiempo, en donde w_t y w_v son las velocidades angulares de la Tierra y Venus respectivamente:

$$x_t = r_t \cos(w_t T) \qquad x_v = r_v \cos(w_v T)$$

$$y_t = r_t \sin(w_t T) \qquad y_v = r_v \sin(w_v T)$$

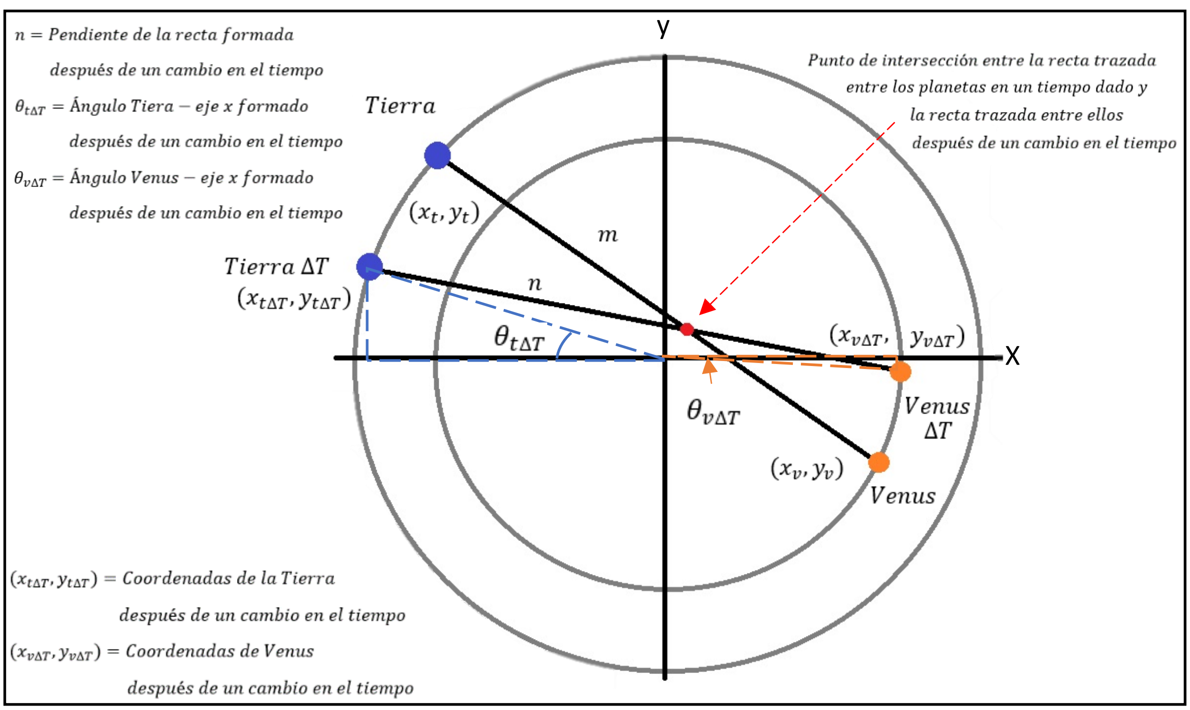
La ecuación que describe la recta que intercepta ambos planetas en un tiempo *T* determinado se halló con la fórmula punto pendiente, que al ordenar quedó como se muestra a continuación:

$$mx - y = mx_t - y_t \qquad \textit{Ecuación 1.}$$

En donde *m* representa la pendiente de la recta, que se puede apreciar en la *Gráfica 2,* y está dada por la ecuación:

$$m = \frac{y_t - y_v}{x_t - x_v}$$

Luego de haber planteado la ecuación de la recta en un tiempo determinado, en la siguiente gráfica tracé otra recta que se forma después de un cambio en el tiempo ΔT, en donde *n* es la pendiente de esta nueva recta.



Gráfica 3: posiciones de los planetas luego de un cambio ΔTen el tiempo. Gráfica con fines ilustrativos, no a escala.

Las ecuaciones para esta nueva recta son similares a la anterior, lo que varía son las coordenadas que ahora están dadas en función del nuevo tiempo que se representa como: $T + \Delta T$. Por lo tanto, las nuevas coordenadas son:

$$x_{t\Delta T} = r_t \cos w_t(T + \Delta T) \qquad x_{v\Delta T} = r_v \cos w_v(T + \Delta T)$$

$$y_{t\Delta T} = r_t \sin w_t(T + \Delta T) \qquad y_{v\Delta T} = r_v \sin w_v(T + \Delta T)$$

*Los subíndices $t\Delta T$ y $v\Delta T$ hacen referencia a las coordenadas de la Tierra y Venus, respectivamente, después de un cambio en el tiempo ΔT.

La ecuación de la nueva recta es:

$$nx - y = nx_{t\Delta T} - y_{t\Delta T}$$

Ecuación 2.

En donde la pendiente *n* está dada por:

$$n = \frac{y_{t\Delta T} - y_{v\Delta T}}{x_{t\Delta T} - x_{v\Delta T}}$$

Ya encontradas las ecuaciones que describen las rectas trazada, se obtiene un sistema de ecuaciones formado por la *Ecuación 1* y la *Ecuación 2* con el cual se obtendrá el punto de intersección entre dichas rectas. Utilizando el *método de las determinantes* se obtuvieron las siguientes ecuaciones para las coordenadas del punto de intersección:

$$x = \frac{nx_{t\Delta T} - mx_t + y_t - y_{t\Delta T}}{n - m}$$

Ecuación 3.

$$y = \frac{mnx_{t\Delta T} - mnx_t + ny_t - my_{t\Delta T}}{n - m}$$

Ecuación 4.

Analizando el problema, observé que para lograr que los puntos de intersección entre las rectas dibujen el patrón de cardiodes, el cambio en el tiempo ΔT debería ser extremadamente pequeño, casi igual a cero. De esta manera, se obtendría una serie de puntos de intersección demasiado cercanos entre sí, creando líneas curvas continuas las cuales formarían la imagen que se crea dentro de la órbita de Venus en la *Ilustración 1.*

Por lo tanto, procedí a sacar el límite de las coordenadas del punto de intersección cuando el cambio del tiempo ΔT tendía a 0. Sin embargo, obtuve que ambos límites son indeterminados, esto se debe a:

$$\lim_{\Delta T \to 0} x_{t\Delta T} = x_t \qquad \lim_{\Delta T \to 0} y_{t\Delta T} = y_t$$

$$\lim_{\Delta T \to 0} x_{v\Delta T} = x_v \qquad \lim_{\Delta T \to 0} y_{v\Delta T} = y_v$$

$$\lim_{\Delta T \to 0} n = m$$

Por lo tanto, al sustituir estos valores en la *Ecuación 3* y la *Ecuación 4*:

$$\lim_{\Delta T \to 0} x = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{\Delta T \to 0} y = \frac{0}{0}$$

Entonces, para poder resolver las indeterminaciones, utilicé la Regla de L'Hôpital la cual establece que: *"si existe el límite L de f '/g' en c, entonces existe el límite de f/g (en c) y es igual a L"* (Franco, 2019).

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Regla de L'Hôpital (Franco, 2019).

Cómo la *Ecuación 3* y la *Ecuación 4* tienen el mismo denominador, únicamente serán necesarias tres funciones:

$$g(\Delta T) = n - m$$

$$f(\Delta T) = nx_{t\Delta T} - mx_t + y_t - y_{t\Delta T}$$

$$h(\Delta T) = mnx_{t\Delta T} - mnx_t + ny_t - my_{t\Delta T}$$

Considerando que los términos que no están únicamente en función del tiempo, y no de $T + \Delta T$, son constantes, las derivadas son:

$$g'(\Delta T) = n'$$

$$f'(\Delta T) = n'x_{t\Delta T} + nx'_{t\Delta T} - y'_{t\Delta T}$$

$$h'(\Delta T) = m(n'(x_{t\Delta T} - x_t) + nx'_{t\Delta T} - y'_{t\Delta T}) + n'y_t$$

Las derivadas de cada término son las siguientes:

$$x'_{t\Delta T} = -r_t w_t \sin w_t(T + \Delta T)$$

$$y'_{t\Delta T} = r_t w_t \cos w_t(T + \Delta T)$$

$$x'_{v\Delta T} = -r_v w_v \sin w_v(T + \Delta T)$$

$$y'_{v\Delta T} = r_v w_v \cos w_v(T + \Delta T)$$

$$n' = \frac{(x_{t\Delta T} - x_{v\Delta T})(y'_{t\Delta T} - y'_{v\Delta T}) - (x'_{t\Delta T} - x'_{v\Delta T})(y_{t\Delta T} - y_{v\Delta T})}{(x_{t\Delta T} - x_{v\Delta T})^2}$$

Utilizando las propiedades de los límites, los límites de los numeradores y del denominador serán obtenidos por separado para obtener su forma más simplificada y así poder evaluar de manera más sencilla el límite de los cocientes mediante la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{\Delta T \to 0} x = \frac{f'(\Delta T)}{g'(\Delta T)} = \frac{\lim_{\Delta T \to 0} f'(\Delta T)}{\lim_{\Delta T \to 0} g'(\Delta T)}$$

$$\lim_{\Delta T \to 0} y = \frac{h'(\Delta T)}{g'(\Delta T)} = \frac{\lim_{\Delta T \to 0} h'(\Delta T)}{\lim_{\Delta T \to 0} g'(\Delta T)}$$

Para g':

$$\begin{aligned} g'(\Delta T) &= \frac{[r_t \cos w_t(T+\Delta T) - r_v \cos w_v(T+\Delta T)][r_t w_t \cos w_t(T+\Delta T) - r_v w_v \cos w_v(T+\Delta T)]}{(r_t \cos w_t(T+\Delta T) - r_v \cos w_v(T+\Delta T))^2} \\ &- \frac{[r_t w_t(-\sin w_t(T+\Delta T)) - r_v w_v(-\sin w_v(T+\Delta T)\ )][r_t \sin w_t(T+\Delta T) - r_v \sin w_v(T+\Delta T)]}{(r_t \cos w_t(T+\Delta T) - r_v \cos w_v(T+\Delta T))^2} \end{aligned}$$

Para encontrar el límite, en la ecuación anterior sustituí ΔT por 0:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta T \to 0} g'(\Delta T) = &\frac{[r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T][r_t w_t \cos w_t T - r_v w_v \cos w_v T]}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} \\ &- \frac{[-r_t w_t \sin w_t T + r_v w_v \sin w_v T][r_t \sin w_t T - r_v \sin w_v T]}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} \end{aligned}$$

El proceso de simplificación del límite se encuentra en el Anexo. Finalmente obtuve:

$$\lim_{\Delta T \to 0} g'(\Delta T) = \frac{{r_t}^2 w_t - r_t r_v (w_v + \mathrm{w_t}) \cos(w_t T - w_v T) + {r_v}^2 w_v}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$

Para f':

$$\begin{aligned} f'(\Delta T) = n' r_t \cos w_t(T+\Delta T) + &\frac{r_t \sin w_t(T+\Delta T) - r_v \sin w_v(T+\Delta T)}{r_t \cos w_t(T+\Delta T) - r_v \cos w_v(T+\Delta T)}(-r_t w_t \sin w_t(T+\Delta T)) \\ &- r_t w_t \cos w_t(T+\Delta T) \end{aligned}$$

Para encontrar el límite en la ecuación anterior sustituí ΔT por 0. También, como ya conozco el límite de *n’,* lo sustituí por $\lim_{\Delta T \to 0} g'(\Delta T)$ para hacer más simple la expresión:

$$\lim_{\Delta T \to 0} f'(\Delta T) = \left(\lim_{\Delta T \to 0} g'(\Delta T)\right) r_t \cos w_t T + \frac{r_t \sin w_t T - r_v \sin w_v T}{r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T}(-r_t w_t \sin w_t T) - r_t w_t \cos w_t T$$

El proceso de simplificación del límite se encuentra en el Anexo. Finalmente obtuve:

$$\lim_{\Delta T \to 0} f'(\Delta T)$$
$$= \frac{r_t\, r_v[(cos w_t T)(-r_t w_v \cos(w_t T - w_v T) + r_v w_v - r_v w_t \cos^2 w_v T) + (cos w_v T)(r_t w_t - r_v w_t (sin w_v T)(sin w_t T))]}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$

Para h':

$$h'(\Delta T) = \frac{r_t \sin(w_t T) - r_v \sin(w_v T)}{r_t \cos(w_t T) - r_v \cos(w_v T)} \Bigg(n'(r_t \cos w_t (T + \Delta T) - r_t cos w_t T) + \frac{r_t \sin w_t (T + \Delta T) - r_v \sin w_v (T + \Delta T)}{r_t \cos w_t (T + \Delta T) - r_v \cos w_v (T + \Delta T)} (-r_t w_t \sin w_t (T + \Delta T)) - r_t w_t (\cos w_t (T + \Delta T)) \Bigg) + n' r_t sin w_t T$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\lim_{\Delta T \to 0} h'(\Delta T) = \frac{r_t \sin(w_t T) - r_v \sin(w_v T)}{r_t \cos(w_t T) - r_v \cos(w_v T)} \Bigg(\left(\lim_{\Delta T \to 0} g'(\Delta T) \right) (r_t \cos w_t T - r_t cos w_t T) + \frac{r_t \sin w_t T - r_v \sin w_v T}{r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T} (-r_t w_t \sin w_t T) - r_t w_t (\cos w_t T) \Bigg) + \left(\lim_{\Delta T \to 0} g'(\Delta T) \right) r_t sin w_t T$$

El proceso de simplificación del límite se encuentra en el Anexo. Finalmente obtuve:

$$\lim_{\Delta T \to 0} h'(\Delta T) = \frac{r_t r_v[(sin w_t T)(-r_v w_t\, (sin^2 w_v T) - r_t w_v \cos w_t T (\cos w_v T) + r_v w_v)]}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{r_t r_v[(sin w_v T)(r_t w_t - r_v w_t (\cos w_v T) cos w_t T - r_t w_v (sin^2 w_t T))]}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$

Ya que encontré los límites cuando $\Delta T \to 0$ de las tres funciones, los sustituí en las expresiones que previamente definí, usando la Regla de L'Hôpital, para los límites de ***x*** y de ***y.*** Como estos ya no están en función de $T + \Delta T$, los doy en términos de las nuevas variables ***i*** y ***j*** en función de T.

$$\lim_{\Delta T \to 0} x = \frac{\lim_{\Delta T \to 0} f'(\Delta T)}{\lim_{\Delta T \to 0} g'(\Delta T)} = i$$

$$i = \frac{r_t\, r_v[(cosw_tT)(-\mathrm{r}_t w_v \cos(w_tT - w_vT) + r_v w_v - r_v w_t \cos^2 w_vT) + (cosw_vT)(r_t w_t - r_v w_t (sinw_vT)(sinw_tT))]}{{r_t}^2 w_t - r_t r_v (w_v + \mathrm{w}_t)\cos(w_tT - w_vT) + {r_v}^2 w_v}$$

$$\lim_{\Delta T \to 0} y = \frac{\lim_{\Delta T \to 0} h'(\Delta T)}{\lim_{\Delta T \to 0} g'(\Delta T)} = j$$

$$j = \frac{r_t r_v[(sinw_tT)(-r_v w_t\,(sin^2 w_vT) - r_t w_v \cos w_tT(\cos w_vT) + r_v w_v) + (sinw_vT)(r_t w_t - r_v w_t(\cos w_vT)cosw_tT - r_t w_v(sin^2 w_tT))]}{{r_t}^2 w_t - r_t r_v (w_v + \mathrm{w}_t)\cos(w_tT - w_vT) + {r_v}^2 w_v}$$

Ya que he encontrado las ecuaciones que definen el valor al que las coordenadas tienden cuando el cambio del tiempo tiende a ser 0, ahora sustituiré las constantes con los siguientes datos tomados de (NASA, 2019):

$$r_t \approx 1.496 * 10^8 km \qquad r_v \approx 1.082 * 10^8 km$$

Las velocidades angulares de los planetas alrededor del sol las calculé con la fórmula $w = 2\pi \frac{1}{T}$, considerando que el período de la tierra es de 365 días y el de Venus 225 días:

$$w_t \approx 1.992 * 10^{-7} \qquad w_v \approx 3.232 * 10^{-7}$$

Sustituyendo y simplificando:

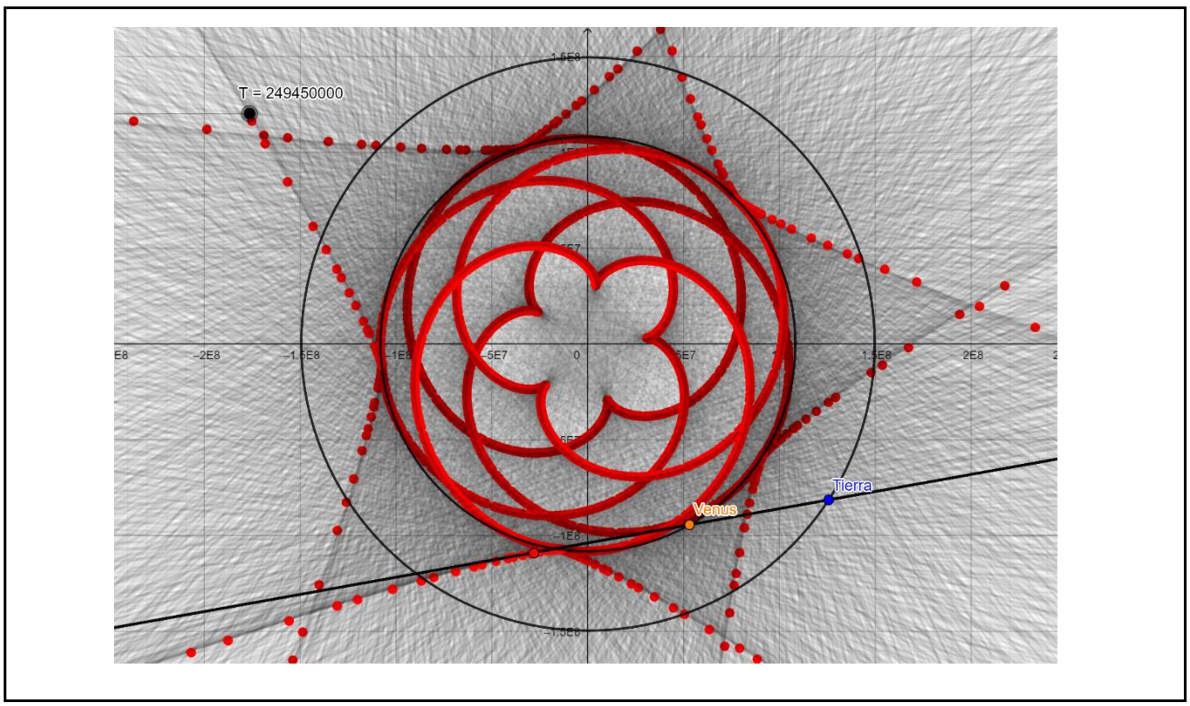
$$i = (1.619 * 10^{16})\left(\frac{(cos(1.992 * 10^{-7}T))(-(48.35)\cos(-1.240 * 10^{-7}T) + 34.97 - 21.55\cos^2(3.232 * 10^{-7}T))}{8.242 * 10^9 - (8.458 * 10^9)\cos(-1.240 * 10^{-7}T)} + \frac{(\cos(3.232 * 10^{-7}T))(29.80 - 21.55(\sin(3.232 * 10^{-7}T))(\sin(1.992 * 10^{-7}T)))}{8.242 * 10^9 - (8.458 * 10^9)\cos(-1.240 * 10^{-7}T)}\right)$$

Ecuación 5.

$$j = (1.619 * 10^{16})\left(\frac{(\sin(1.992*10^{-7}T))(-21.55\, sin^2(3.232*10^{-7}T) - 48.35(\cos(1.992*10^{-7}T))(\cos(3.232*10^{-7}T)) + 34.97)}{8.242*10^9 - (8.458*10^9)\cos(-1.240*10^{-7}T)} + \frac{(\sin(3.232*10^{-7}T))(29.80 - 21.55(\cos(3.232*10^{-7}T))(\cos(1.992*10^{-7}T)) - 48.35(sin^2(1.992*10^{-7}T))}{8.242*10^9 - (8.458*10^9)\cos(-1.240*10^{-7}T)}\right)$$

Ecuación 6.

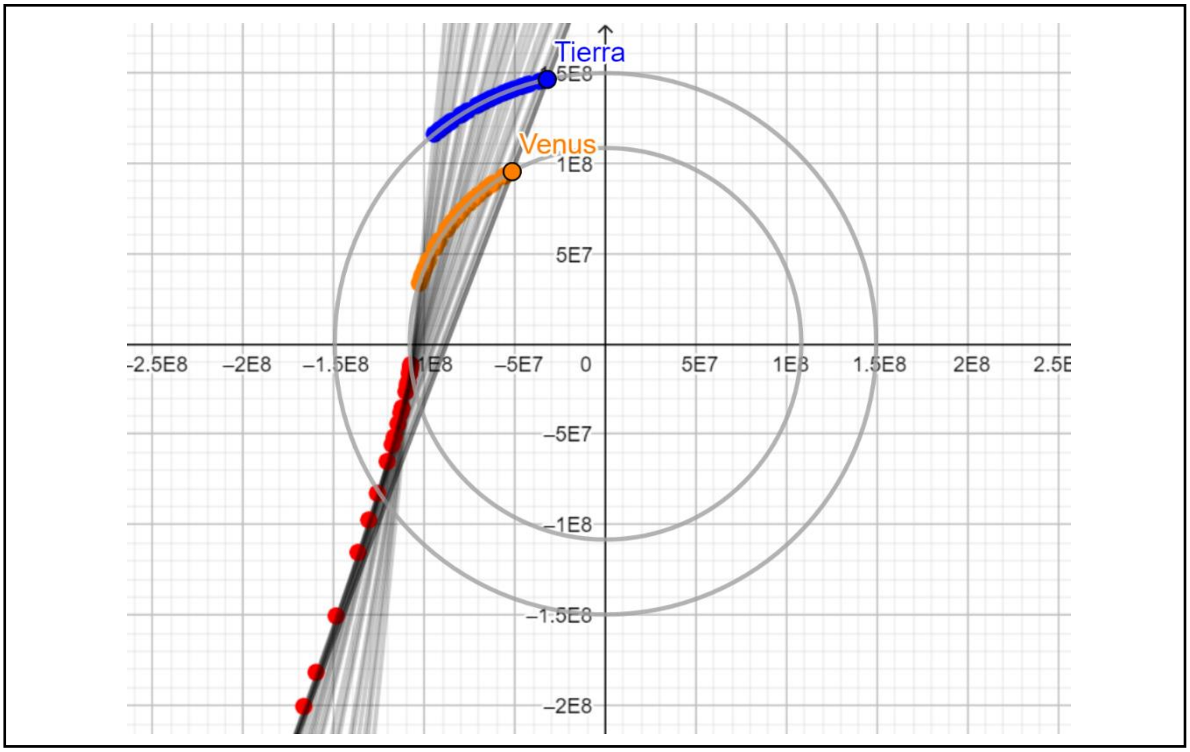
Para comprobar mis ecuaciones, las grafiqué utilizando el programa GeoGebra y obtuve la siguiente imagen:



Gráfica 4: Dibujo formado por la Tierra y Venus tras, aproximadamente, 8 órbitas (años) completas de la Tierra.

Como se puede ver en la *Gráfica 4*, el patrón formado adentro de la órbita de Venus coincide al que se forma adentro de la órbita de este planeta en la *Ilustración 1*. Sin embargo, en esa ilustración sólo se muestra el dibujo formado adentro de la órbita de la Tierra, por lo que no se puede observar la figura parecida a una estrella circunscrita en la órbita de Venus.

La formación de la estrella se debe a que, mientras ambos planetas se van acercando cada vez más uno al otro, la diferencia entre la pendiente de la recta trazada entre ellos en un tiempo determinado y la pendiente de la recta trazada después de un pequeño cambio en el tiempo va disminuyendo. Por lo tanto, el punto de intersección entre ambas rectas se va alejando de la órbita de Venus *(Gráfica 5)*, formando la estrella de la *Gráfica 4*.



Gráfica 5: Puntos de intersección afuera de la órbita de venus

Conclusión

En esta exploración, se encontró un sistema de ecuaciones paramétricas que describen el dibujo formado al trazar una recta entre el planeta Tierra y Venus. Para poder lograr esto, se consideró que el dibujo se formaba por la intersección entre la recta trazada entre los planetas en un tiempo determinado y la recta trazada entre ellos después de un cambio extremadamente pequeño.

Se obtuvieron las ecuaciones para las posiciones de los planetas en un tiempo T y se trazó una recta entre ambos, lo mismo para las posiciones de estos en un tiempo $T + \Delta T$. A partir de esto, se obtuvieron las ecuaciones paramétricas para las coordenadas del punto de intersección entre ambas rectas. Luego, para poder obtener el valor al que las coordenadas tendían cuando el cambio en el tiempo era muy pequeño, se intentó encontrar el límite de estas ecuaciones cuando $\Delta T \to 0$ pero estos eran indeterminados. Para resolver las indeterminaciones se utilizó la regla de L'Hôpital, lo que permitió obtener las ecuaciones paramétricas generales para el dibujo. Finalmente se insertaron datos reales a las ecuaciones y se graficaron en GeoGebra, obteniendo la *Gráfica 4*, lo que demostró que estas son correctas.

Específicamente las ecuaciones que satisfacen el objetivo de esta investigación son la *Ecuación 5* y la *Ecuación 6.* Sin embargo, analizando las ecuaciones generales que obtuve:

$$i = \frac{r_t\, r_v[(cosw_tT)(-\mathrm{r}_t w_v \cos(w_tT - w_vT) + r_v w_v - r_v w_t \cos^2 w_vT) + (cosw_vT)(r_t w_t - r_v w_t(sinw_vT)(sinw_tT))]}{r_t{}^2 w_t - r_t r_v(w_v + \mathrm{w}_t)\cos(w_tT - w_vT) + r_v{}^2 w_v}$$

$$j = \frac{r_t r_v[(sinw_tT)(-r_v w_t\,(sin^2 w_vT) - r_t w_v \cos w_tT(\cos w_vT) + r_v w_v) + (sinw_vT)(r_t w_t - r_v w_t(\cos w_vT)cosw_tT - r_t w_v(sin^2 w_tT))]}{r_t{}^2 w_t - r_t r_v(w_v + \mathrm{w}_t)\cos(w_tT - w_vT) + r_v{}^2 w_v}$$

Me di cuenta que estas describen el dibujo formado por cualquier sistema de objetos en el que ambos se mueven en una trayectoria circular y cuyo centro es el mismo, pero que tienen distintos radios. Por lo tanto, estas ecuaciones también pueden describir el dibujo formado entre cualquier par de planetas (considerando un modelo ideal y sustituyendo por las variables correspondientes).

Una de las limitantes de esta exploración es que estas ecuaciones, por haber considerado un modelo ideal del sistema solar (con órbitas perfectamente elípticas, en cuyo centro se encuentra el sol, y velocidades angulares constantes), no describen el dibujo real que se forma por el movimiento de ambos planetas. Sin embargo, el propósito de esta exploración no era encontrar expresiones matemáticas para el dibujo real, sino para el dibujo de la *Ilustración 1*, que es un modelo ideal. Del mismo modo, la exactitud del programa graficador, así como el uso de 4 cifras significativas para las velocidades angulares y los radios, afectaron en la precisión de los puntos, lo que se evidencia en que los picos de la estrella formada no son perfectamente simétricos entre sí. Sin embargo, la imagen formada fue bastante exacta y similar a la de la ilustración original.

Bibliografía

Franco, Á. (27 de 03 de 2019). La Regla de L'Hôpital: Versión Discreta. (Vol. 3). (. Visión Antataura, Ed.) Panamá. Recuperado el 18 de 09 de 2020, de https://core.ac.uk/download/pdf/268592967.pdf

Henderson, M. (03 de 08 de 2019). *Dance of Earth And Venus*. Recuperado el 10 de 09 de 2020, de Science Alert: https://www.sciencealert.com/the-celestial-dance-between-earth-and-venus-draws-a-stunning-pattern-through-space

NASA. (09 de 12 de 2019). *Solar System Exploration*. Recuperado el 15 de 09 de 2020, de NASA Science: https://solarsystem.nasa.gov/

Anexo

Límite de $g'(\Delta T)$

$$g'(\Delta T) = \frac{[r_t \cos w_t(T+\Delta T) - r_v \cos w_v(T+\Delta T)][r_t w_t \cos w_t(T+\Delta T) - r_v w_v \cos w_v(T+\Delta T)]}{(r_t \cos w_t(T+\Delta T) - r_v \cos w_v(T+\Delta T))^2} - \frac{[r_t w_t(-\sin w_t(T+\Delta T)) - r_v w_v(-\sin w_v(T+\Delta T))][r_t \sin w_t(T+\Delta T) - r_v \sin w_v(T+\Delta T)]}{(r_t \cos w_t(T+\Delta T) - r_v \cos w_v(T+\Delta T))^2}$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} g'(\Delta T) = \frac{[r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T][r_t w_t \cos w_t T - r_v w_v \cos w_v T]}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} - \frac{[-r_t w_t \sin w_t T + r_v w_v \sin w_v T][r_t \sin w_t T - r_v \sin w_v T]}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} g'(\Delta T) = \frac{{r_t}^2 w_t \cos^2 w_t T - r_t \cos w_t T(r_v w_v \cos w_v T) - r_v \cos w_v T(r_t w_t \cos w_t T) + {r_v}^2 w_v \cos^2 w_v T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{{r_t}^2 w_t \sin^2 w_t T - r_t w_t \sin w_t T\,(r_v \sin w_v T) - r_v w_v \sin w_v T(r_t \sin w_t T) + {r_v}^2 w_v \sin^2 w_v T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$

$$sin^2 + cos^2 = 1$$

$$sin^2 = 1 - cos^2$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} g'(\Delta T) = \frac{{r_t}^2 w_t \cos^2 w_t T - r_t \cos w_t T(r_v w_v \cos w_v T) - r_v \cos w_v T(r_t w_t \cos w_t T) + {r_v}^2 w_v \cos^2 w_v T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{{r_t}^2 w_t(1 - cos^2 w_t T) - r_t w_t \sin w_t T\,(r_v \sin w_v T) - r_v w_v \sin w_v T(r_t \sin w_t T) + {r_v}^2 w_v(1 - cos^2 w_v T)}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} g'(\Delta T) = \frac{{r_t}^2 w_t \cos^2 w_t T - r_t \cos w_t T(r_v w_v \cos w_v T) - r_v \cos w_v T(r_t w_t \cos w_t T) + {r_v}^2 w_v \cos^2 w_v T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{{r_t}^2 w_t - {r_t}^2 w_t cos^2 w_t T - r_t w_t \sin w_t T\,(r_v \sin w_v T) - r_v w_v \sin w_v T(r_t \sin w_t T) + {r_v}^2 w_v - {r_v}^2 w_v cos^2 w_v T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} g'(\Delta T) = \frac{- r_t \cos w_t T(r_v w_v \cos w_v T) - r_v \cos w_v T(r_t w_t \cos w_t T) + {r_t}^2 w_t}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{-r_t w_t \sin w_t T\,(r_v \sin w_v T) - r_v w_v \sin w_v T(r_t \sin w_t T) + {r_v}^2 w_v}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} g'(\Delta T) = \frac{-r_t r_v(w_v(\cos w_t T)(\cos w_v T) + w_t(\cos w_v T)(\cos w_t T) + w_t(\sin w_t T)\,(\sin w_v T) + w_v(\sin w_v T)(\sin w_t T))}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{{r_v}^2 w_v + {r_t}^2 w_t}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} g'(\Delta T) = \frac{-r_t r_v\{(w_v + \mathrm{w}_t)[(\cos w_t T)(\cos w_v T)] + (w_t + w_v)[(\sin w_t T)\,(\sin w_v T)]\} + {r_v}^2 w_v + {r_t}^2 w_t}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} g'(\Delta T) = \frac{-r_t r_v\{(w_v + \mathrm{w}_t)\,[(\cos w_t T)\,(\cos w_v T) + (\sin w_t T)\,(\sin w_v T)]\} + {r_v}^2 w_v + {r_t}^2 w_t}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$

$$cos\alpha\ cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

$$(\cos w_t T)\,(\cos w_v T) = \frac{1}{2}(\cos(w_t T + w_v T) + \cos(w_t T - w_v T))$$

$$sen\alpha\ sen\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$(\sin w_t T)\,(\sin w_v T) = \frac{1}{2}(\cos(w_t T - w_v T) - \cos(w_t T + w_v T))$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} g'(\Delta T) = \frac{-r_t r_v\{(w_v + \mathrm{w_t})[\frac{1}{2}\cos(w_t T + w_v T) + \frac{1}{2}\cos(w_t T - w_v T) + \frac{1}{2}\cos(w_t T - w_v T) - \frac{1}{2}\cos(w_t T + w_v T)]\}}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{{r_v}^2 w_v + {r_t}^2 w_t}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} g'(\Delta T) = \frac{{r_t}^2 w_t - r_t r_v (w_v + \mathrm{w_t}) \cos(w_t T - w_v T) + {r_v}^2 w_v}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$

Límite de $f'(\Delta T)$

$$f'(\Delta T) = n' r_t \cos w_t (T + \Delta T) + \frac{r_t \sin w_t (T+\Delta T) - r_v \sin w_v (T+\Delta T)}{r_t \cos w_t (T+\Delta T) - r_v \cos w_v (T+\Delta T)}(-r_t w_t \sin w_t (T+\Delta T)) - r_t w_t \cos w_t (T+\Delta T)$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} f'(\Delta T) = \left(\lim_{\Delta T\to 0} g'(\Delta T)\right) r_t \cos w_t T + \frac{r_t \sin w_t T - r_v \sin w_v T}{r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T}(-r_t w_t \sin w_t T) - r_t w_t \cos w_t T$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} f'(\Delta T) = \left(\frac{-\, r_t \cos w_t T (r_v w_v \cos w_v T) - r_v \cos w_v T (r_t w_t \cos w_t T) + {r_t}^2 w_t}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{-r_t w_t \sin w_t T\,(r_v \sin w_v T) - r_v w_v \sin w_v T (r_t \sin w_t T) + {r_v}^2 w_v}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}\right) r_t \cos w_t T + \frac{-{r_t}^2 w_t \sin^2 w_t T + r_t w_t r_v (\sin w_v T)(sin w_t T)}{r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T} - r_t w_t \cos w_t T$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} f'(\Delta T) = \frac{-\, {r_t}^2\, r_v w_v \cos^2 w_t T (\cos w_v T) - {r_t}^2 r_v w_t \cos w_v T (\cos^2 w_t T) + {r_t}^3 w_t cos w_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{-{r_t}^2 r_v w_t \sin w_t T\,(\sin w_v T) cos w_t T - {r_t}^2 r_v w_v \sin w_v T (\sin w_t T) cos w_t T + r_t {r_v}^2 w_v cos w_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{-{r_t}^2 w_t \sin^2 w_t T + r_t r_v w_t (\sin w_v T)(sin w_t T)}{r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T} - r_t w_t \cos w_t T$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta T\to 0} f'(\Delta T)\\
&= \frac{-r_t^2\, r_v w_v \cos^2 w_tT(\cos w_vT) - r_t^2 r_v w_t \cos w_vT(\cos^2 w_tT) + r_t^3 w_t cosw_tT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}\\
&+ \frac{-r_t^2 r_v w_t \sin w_tT\ (\sin w_vT)cosw_tT - r_t^2 r_v w_v \sin w_vT(\sin w_tT)cosw_tT + r_t r_v^2 w_v cosw_tT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}\\
&+ \frac{-r_t^3 w_t\ (\sin^2 w_tT)cosw_tT + r_t^2 r_v w_t(\sin^2 w_tT)cosw_vT + r_t^2 r_v w_t(\sin w_vT)(sinw_tT)cosw_tT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}\\
&+ \frac{-r_t r_v^2 w_t(sinw_vT)(sinw_tT)cosw_vT - r_t^3 w_t \cos^3 w_tT + 2r_t^2 r_v w_t\ (\cos^2 w_tT)\cos w_vT - r_t r_v^2 w_t(cosw_tT)\cos^2 w_vT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}
\end{aligned}
$$

Sin cos2

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta T\to 0} f'(\Delta T)\\
&= \frac{-r_t^2\, r_v w_v \cos^2 w_tT(\cos w_vT) - r_t^2 r_v w_t \cos w_vT(\cos^2 w_tT) + r_t^3 w_t cosw_tT - r_t^2 r_v w_t \sin w_tT\ (\sin w_vT)cosw_tT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}\\
&+ \frac{-r_t^2 r_v w_v \sin w_vT(\sin w_tT)cosw_tT + r_t r_v^2 w_v cosw_tT - r_t^3 w_t\ cosw_tT + r_t^3 w_t \cos^3 w_tT + r_t^2 r_v w_t cosw_vT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}\\
&+ \frac{-r_t^2 r_v w_t(\cos^2 w_tT)cosw_vT + r_t^2 r_v w_t(sinw_vT)(sinw_tT)cosw_tT - r_t r_v^2 w_t(sinw_vT)(sinw_tT)cosw_vT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}\\
&+ \frac{-r_t^3 w_t \cos^3 w_tT + 2r_t^2 r_v w_t\ (\cos^2 w_tT)\cos w_vT - r_t r_v^2 w_t(cosw_tT)\cos^2 w_vT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta T\to 0} f'(\Delta T)\\
&= \frac{-r_t^2\, r_v w_v \cos^2 w_tT(\cos w_vT) + r_t^3 w_t cosw_tT - r_t^2 r_v w_t \sin w_tT\ (\sin w_vT)cosw_tT - r_t^2 r_v w_v \sin w_vT(\sin w_tT)cosw_tT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}\\
&+ \frac{r_t r_v^2 w_v cosw_tT - r_t^3 w_t\ cosw_tT + r_t^3 w_t \cos^3 w_tT + r_t^2 r_v w_t cosw_vT + r_t^2 r_v w_t(\sin w_vT)(sinw_tT)cosw_tT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}\\
&+ + \frac{-r_t r_v^2 w_t(sinw_vT)(sinw_tT)cosw_vT - r_t^3 w_t \cos^3 w_tT - r_t r_v^2 w_t(cosw_tT)\cos^2 w_vT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta T\to 0} f'(\Delta T)\\
&= \frac{-r_t^2\, r_v w_v \cos^2 w_tT(\cos w_vT) - r_t^2 r_v w_t \sin w_tT\ (\sin w_vT)cosw_tT - r_t^2 r_v w_v \sin w_vT(\sin w_tT)cosw_tT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}\\
&+ \frac{r_t r_v^2 w_v cosw_tT + r_t^3 w_t \cos^3 w_tT + r_t^2 r_v w_t cosw_vT + r_t^2 r_v w_t(\sin w_vT)(sinw_tT)cosw_tT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}\\
&+ \frac{-r_t r_v^2 w_t(sinw_vT)(sinw_tT)cosw_vT - r_t^3 w_t \cos^3 w_tT - r_t r_v^2 w_t(cosw_tT)\cos^2 w_vT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta T\to 0} f'(\Delta T) &= \frac{-r_t^2\, r_v w_v \cos^2 w_tT(\cos w_vT) - r_t^2 r_v w_v \sin w_vT(\sin w_tT)cosw_tT + r_t r_v^2 w_v cosw_tT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}\\
&+ \frac{r_t^2 r_v w_t cosw_vT - r_t r_v^2 w_t(sinw_vT)(sinw_tT)cosw_vT - r_t r_v^2 w_t(cosw_tT)\cos^2 w_vT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta T\to 0} f'(\Delta T) = r_t r_v \Bigg(&\frac{-r_t w_v \cos^2 w_tT(\cos w_vT) - r_t w_v \sin w_vT(\sin w_tT)cosw_tT + r_v w_v cosw_tT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}\\
&+ \frac{r_t w_t cosw_vT - r_v w_t(sinw_vT)(sinw_tT)cosw_vT - r_v w_t(cosw_tT)\cos^2 w_vT}{(r_t \cos w_tT - r_v \cos w_vT)^2}\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} f'(\Delta T) = r_t r_v \left(\frac{(cosw_vT)(r_tw_t - r_vw_t(sinw_vT)(sinw_tT))}{(r_t\cos w_tT - r_v\cos w_vT)^2} + \frac{(cosw_tT)(-r_tw_v\cos w_tT(\cos w_vT) - r_tw_v\sin w_vT(\sin w_tT) + r_vw_v - r_vw_t\cos^2 w_vT)}{(r_t\cos w_tT - r_v\cos w_vT)^2} \right)$$

$$cos\alpha\ cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

$$cosw_tT(\cos w_vT) = \frac{1}{2}(\cos(w_tT + w_vT) + \cos(w_tT - w_vT))$$

$$sen\alpha\ sen\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin w_vT(\sin w_tT) = \frac{1}{2}(\cos(w_tT - w_vT) - \cos(w_tT + w_vT))$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} f'(\Delta T) = r_t r_v \left(\frac{(cosw_vT)(r_tw_t - r_vw_t(sinw_vT)(sinw_tT))}{(r_t\cos w_tT - r_v\cos w_vT)^2} + \frac{(cosw_tT)(r_vw_v - r_vw_t\cos^2 w_vT)}{(r_t\cos w_tT - r_v\cos w_vT)^2} + \frac{(cosw_tT)(-\frac{1}{2}r_tw_v[\cos(w_tT + w_vT) + \cos(w_tT - w_vT)] - \frac{1}{2}r_tw_v[\cos(w_tT - w_vT) - \cos(w_tT + w_vT)])}{(r_t\cos w_tT - r_v\cos w_vT)^2} \right)$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} f'(\Delta T) = \frac{r_t\, r_v[(cosw_tT)(-\mathrm{r}_tw_v\cos(w_tT - w_vT) + r_vw_v - r_vw_t\cos^2 w_vT) + (cosw_vT)(r_tw_t - r_vw_t(sinw_vT)(sinw_tT))]}{(r_t\cos w_tT - r_v\cos w_vT)^2}$$

Límite de $h'(\Delta T)$

$$h'(\Delta T) = \frac{r_t\sin(w_tT) - r_v\sin(w_vT)}{r_t\cos(w_tT) - r_v\cos(w_vT)} \left(n'(r_t\cos w_t(T+\Delta T) - r_tcosw_tT) + \frac{r_t\sin w_t(T+\Delta T) - r_v\sin w_v(T+\Delta T)}{r_t\cos w_t(T+\Delta T) - r_v\cos w_v(T+\Delta T)}(-r_tw_t\sin w_t(T+\Delta T)) - r_tw_t(\cos w_t(T+\Delta T)) \right) + n'r_tsinw_tT$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} h'(\Delta T) = \frac{r_t\sin(w_tT) - r_v\sin(w_vT)}{r_t\cos(w_tT) - r_v\cos(w_vT)} \left(\left(\lim_{\Delta T\to 0} g'(\Delta T) \right)(r_t\cos w_tT - r_tcosw_tT) + \frac{r_t\sin w_tT - r_v\sin w_vT}{r_t\cos w_tT - r_v\cos w_vT}(-r_tw_t\sin w_tT) - r_tw_t(\cos w_tT) \right) + \left(\lim_{\Delta T\to 0} g'(\Delta T) \right) r_tsinw_tT$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} h'(\Delta T) = \frac{r_t\sin(w_tT) - r_v\sin(w_vT)}{r_t\cos(w_tT) - r_v\cos(w_vT)} \left(\frac{r_t\sin w_tT - r_v\sin w_vT}{r_t\cos w_tT - r_v\cos w_vT}(-r_tw_t\sin w_tT) - r_tw_t(\cos w_tT) \right) + n'r_tsinw_tT$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} h'(\Delta T) = \frac{r_t \sin(w_t T) - r_v \sin(w_v T)}{r_t \cos(w_t T) - r_v \cos(w_v T)}\left(\frac{-{r_t}^2 w_t \sin^2 w_t T + r_t r_v w_t (\sin w_v T)(sin w_t T)}{r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T} - r_t w_t (\cos w_t T)\right) + n' r_t sin w_t T$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} h'(\Delta T) = \frac{r_t \sin(w_t T) - r_v \sin(w_v T)}{r_t \cos(w_t T) - r_v \cos(w_v T)}\left(\frac{-{r_t}^2 w_t \sin^2 w_t T + r_t r_v w_t (\sin w_v T)(sin w_t T) - {r_t}^2 w_t \cos^2 w_t T + r_t r_v w_t (\cos w_v T) cos w_t T}{r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T}\right) + n' r_t sin w_t T$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} h'(\Delta T) = \frac{(r_t \sin(w_t T) - r_v \sin(w_v T))(-{r_t}^2 w_t \sin^2 w_t T + r_t r_v w_t (\sin w_v T)(sin w_t T) - {r_t}^2 w_t \cos^2 w_t T + r_t r_v w_t (\cos w_v T) cos w_t T)}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + n' r_t sin w_t T$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} h'(\Delta T) = \frac{-{r_t}^3 w_t \sin^3 w_t T + 2{r_t}^2 r_v w_t (\sin w_v T)(sin^2 w_t T) - {r_t}^3 w_t \cos^2 w_t T (sin w_t T) + {r_t}^2 r_v w_t (sin w_t T)(\cos w_v T) cos w_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{-r_t {r_v}^2 w_t (\sin^2 w_v T)(sin w_t T) + {r_t}^2 r_v w_t\, (\cos^2 w_t T) sin w_v T - r_t {r_v}^2 w_t (sin w_v T)(\cos w_v T) cos w_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + n' r_t sin w_t T$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} h'(\Delta T) = \frac{-{r_t}^3 w_t \sin w_t T + {r_t}^3 w_t (\cos^2 w_t T) \sin w_t T + 2{r_t}^2 r_v w_t sin w_v T - 2{r_t}^2 r_v w_t (cos^2 w_t T) \sin w_v T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{-{r_t}^3 w_t \cos^2 w_t T (sin w_t T) + {r_t}^2 r_v w_t (sin w_t T)(\cos w_v T) cos w_t T - r_t {r_v}^2 w_t sin w_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{r_t {r_v}^2 w_t (cos^2 w_v T) sin w_t T + {r_t}^2 r_v w_t\, (\cos^2 w_t T) sin w_v T - r_t {r_v}^2 w_t (sin w_v T)(\cos w_v T) cos w_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + n' r_t sin w_t T$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} h'(\Delta T) = \frac{-{r_t}^3 w_t \sin w_t T + 2{r_t}^2 r_v w_t sin w_v T - {r_t}^2 r_v w_t (cos^2 w_t T) \sin w_v T + {r_t}^2 r_v w_t (sin w_t T)(\cos w_v T) cos w_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{-r_t {r_v}^2 w_t sin w_t T + r_t {r_v}^2 w_t (cos^2 w_v T) sin w_t T - r_t {r_v}^2 w_t (sin w_v T)(\cos w_v T) cos w_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + n' r_t sin w_t T$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} h'(\Delta T) = \frac{-{r_t}^3 w_t \sin w_t T + 2{r_t}^2 r_v w_t sin w_v T - {r_t}^2 r_v w_t (cos^2 w_t T) \sin w_v T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{{r_t}^2 r_v w_t (sin w_t T)(\cos w_v T) cos w_t T - r_t {r_v}^2 w_t sin w_t T + r_t {r_v}^2 w_t (cos^2 w_v T) sin w_t T - r_t {r_v}^2 w_t (sin w_v T)(\cos w_v T) cos w_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{- r_t r_v w_v \cos w_t T (\cos w_v T) - r_t r_v w_t \cos w_v T (\cos w_t T) + {r_t}^2 w_t - r_t r_v w_t \sin w_t T\, (\sin w_v T)}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + \frac{-r_t r_v w_v \sin w_v T (\sin w_t T) + {r_v}^2 w_v}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2} + r_t sin w_t T$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} h'(\Delta T)$$
$$= \frac{-r_t{}^3 w_t \sin w_t T + 2r_t{}^2 r_v w_t sinw_v T - r_t{}^2 r_v w_t (cos^2 w_t T) sinw_v T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$
$$+ \frac{r_t{}^2 r_v w_t (sinw_t T)(\cos w_v T) cosw_t T - r_t r_v{}^2 w_t sinw_t T + r_t r_v{}^2 w_t (cos^2 w_v T) sinw_t T - r_t r_v{}^2 w_t (sinw_v T)(\cos w_v T) cosw_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$
$$+ \frac{- r_t{}^2 r_v w_v \cos w_t T (\cos w_v T) sinw_t T - r_t{}^2 r_v w_t \cos w_v T (\cos w_t T) sinw_t T + r_t{}^3 w_t sinw_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$
$$+ \frac{-r_t{}^2 r_v w_t \sin^2 w_t T\,(\sin w_v T) - r_t{}^2 r_v w_v \sin w_v T (\sin^2 w_t T) + r_t r_v{}^2 w_v sinw_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$

$sin^2 = 1 - cos^2$

$$\lim_{\Delta T\to 0} h'(\Delta T)$$
$$= \frac{-r_t{}^3 w_t \sin w_t T + 2r_t{}^2 r_v w_t sinw_v T - r_t{}^2 r_v w_t (cos^2 w_t T) \sin w_v T + r_t{}^2 r_v w_t (sinw_t T)(\cos w_v T) cosw_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$
$$+ \frac{-r_t r_v{}^2 w_t sinw_t T + r_t r_v{}^2 w_t (cos^2 w_v T) sinw_t T - r_t r_v{}^2 w_t (sinw_v T)(\cos w_v T) cosw_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$
$$+ \frac{- r_t{}^2 r_v w_v \cos w_t T (\cos w_v T) sinw_t T - r_t{}^2 r_v w_t \cos w_v T (\cos w_t T) sinw_t T + r_t{}^3 w_t sinw_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$
$$+ \frac{-r_t{}^2 r_v w_t (1 - \cos^2 w_t T)(\sin w_v T) - r_t{}^2 r_v w_v \sin w_v T (1 - \cos^2 w_t T) + r_t r_v{}^2 w_v sinw_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} h'(\Delta T)$$
$$= \frac{r_t{}^2 r_v w_t sinw_v T - r_t r_v{}^2 w_t sinw_t T + r_t r_v{}^2 w_t (cos^2 w_v T) sinw_t T - r_t r_v{}^2 w_t (sinw_v T)(\cos w_v T) cosw_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$
$$+ \frac{-r_t{}^2 r_v w_v \cos w_t T (\cos w_v T) sinw_t T - r_t{}^2 r_v w_v sinw_v T + r_t{}^2 r_v w_v (\cos^2 w_t T) \sin w_v T + r_t r_v{}^2 w_v sinw_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} h'(\Delta T)$$
$$= r_t r_v \left[\frac{r_t w_t sinw_v T - r_v w_t sinw_t T + r_v w_t (cos^2 w_v T) sinw_t T - r_v w_t (sinw_v T)(\cos w_v T) cosw_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{-r_t w_v \cos w_t T (\cos w_v T) sinw_t T - r_t w_v sinw_v T + r_t w_v (\cos^2 w_t T) \sin w_v T + r_v w_v sinw_t T}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}\right]$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} h'(\Delta T) = r_t r_v \left[\frac{sinw_t T(-r_v w_t + r_v w_t (cos^2 w_v T) - r_t w_v \cos w_t T (\cos w_v T) + r_v w_v)}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{(sinw_v T)(r_t w_t - r_v w_t (\cos w_v T) cosw_t T - r_t w_v + r_t w_v (\cos^2 w_t T))}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}\right]$$

$$\lim_{\Delta T\to 0} h'(\Delta T) = \frac{r_t r_v [(sinw_t T)(-r_v w_t\,(sin^2 w_v T) - r_t w_v \cos w_t T (\cos w_v T) + r_v w_v)]}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$
$$+ \frac{r_t r_v [(sinw_v T)(r_t w_t - r_v w_t (\cos w_v T) cosw_t T - r_t w_v (sin^2 w_t T))]}{(r_t \cos w_t T - r_v \cos w_v T)^2}$$