Criterio	Nota Obtenida	Nota máxima	Comentario
A: Comunicación	4	/ 4	La exploración es coherente, está bien estructurada, se explican claramente todas las ideas y procedimientos. Existe una buena coherencia entre la introducción y sus conclusiones.
B: Presentación matemática	3	/ 3	Utiliza un lenguaje matemático adecuado y pone especial empeño en la simbología y en definir los conceptos importantes. Sus procedimientos son coherentes, pertinentes y fundamentados
C: Compromiso personal	3	/ 4	Se muestra un pensamiento creativo identificable al profundizar en el análisis del juego, sin embargo, podría haber evidenciado un poco más su creatividad.
D: Reflexión	3	/ 3	Sus conclusiones hacen referencia con el objetivo, acepta las limitaciones y la validez de los procedimientos, además, analiza el problema de diferentes puntos de vista utilizando para ello diferentes herramientas matemáticas y comenta las implicaciones de sus resultados
E: Uso de las matemáticas	5	/ 6	Los resultados son razonables y analizados, interactúa con diferentes áreas de la matemática, utiliza un lenguaje académico apropiado con procedimientos coherentes apoyándose en medios tecnológicos sin abusar de ellos, sin embargo, me parece que falta el rigor apropiado en la presentación de las matemáticas.
TOTAL	18	/ 20	

Exploración matemática

Análisis tablero de Galton

"Confirmo que soy el autor de este trabajo y que es la versión final. He citado debidamente las palabras o ideas de otras personas, se hayan expresado estas de forma escrita, oral, o visual."

índice

Introducción

El tablero o máquina de Galton es uno de los inventos matemáticos con características especiales. Sin parecerlo, reúne muchos conceptos matemáticos importantes, como la geometría, calculo, probabilidad, etc. Consiste en un tablero de **n** filas, diseñado simétricamente divididos por clavos. La primera fila tiene 1 clavo en el centro, la fila 2 con 2 clavos separados a la misma distancia del clavo de arriba solo que uno a la izquierda y el otro a la derecha. Se sigue el mismo patrón hasta alcanzar el número de filas deseado.

Este invento fue utilizado en un inicio por Galton para descubrir el teorema del límite central. Pero hoy en día se encuentra en juegos de ferias, debido a su comportamiento. Cuando se lanzan cincos o canicas desde el punto más alto, las canicas se distribuyen en forma de Campana de Gauss. Si el tablero está diseñado de forma simétrica, es decir todos los clavos mantienen la misma distancia, y si todos los caminos tienen el mismo ancho y longitud, la distribución es la misma sin importar el mismo número de filas. Por eso surge el interés, que características matemáticas contiene el tablero para que esto ocurra de esta manera. Que conceptos matemáticos están detrás de tablero.

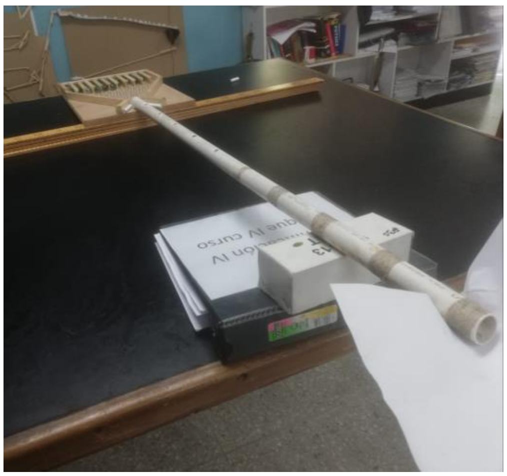
El propósito de este trabajo de investigación será indagar cómo se comporta el tablero de Galton. Primero se analizará la teoría. Se estudiará le parte de geometría y simetría del tablero, y que características contiene. Luego la probabilidad que tiene la canica de llegar a determinado camino dependiendo del número de filas que contenga. Estudiando todas las rutas posibles a determinado punto. Encontrando la formula general de dos maneras distintas. La primera por combinatoria partiendo de un análisis del triángulo de pascal, y por último con el concepto de la distribución normal.

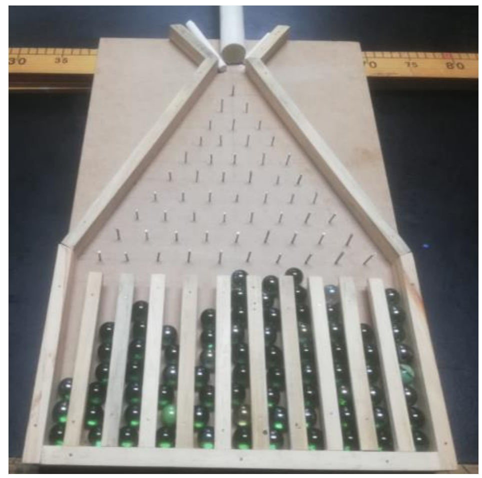
Luego se graficará la función de probabilidad del tablero teórico, utilizando las fórmulas encontradas, para comprobar si se tiene la forma de campana de Gauss esperada. Esto se contrastará con una función experimental. Para ello, se diseñó un tablero de Galton experimental. Se realizaron pruebas con 1000 intentos, y se graficaron los datos en una función de probabilidad con respecto a los caminos.

Y por último, por medio de una prueba de hipótesis se contrastaran ambos casos, para comprobar si mantienen relación, y analizar cuáles son los principales aspectos que debe de tener un tablero experimental para que se comporte lo más parecido al análisis teórico.

Datos

La duda sobre cómo funcionaban estos tableros, y como entra en juego la probabilidad a la hora de tomar decisiones llevo a la práctica de este juego. Para determinar la tendencia que forma el tablero de Galton, se hicieron pruebas experimentalmente. Se construyó un tablero de n=10 (Numero de filas). Con una separación de 2.5 ±0.2cm entre clavos. Se lanzaron 1000 canicas para obtener un numero de datos considerable que permita hallar conclusiones más exactas. Se lanzaron las canicas a través del tubo mostrado, con el fin de que todas tuvieran el mismo punto de salida.





Y los resultados fueron los siguientes.

Imagen 1. Representación experimento

Numero de entrada (Izquierda a derecha)	**Numero de canicas**
1	65
2	79
3	103
4	77
5	80
6	74
7	84
8	62
9	84
10	107
11	185
TOTAL	1000

Tabla 1

Desarrollo

Simetría del tablero

El tablero de Galton tiene una característica de geometría, que nos permitirá entender cómo se comportaría teóricamente el juego.

Tomemos como ejemplo un tablero de **n**=3, siendo n el número de filas. Supongamos que los círculos son como los clavos en el tablero.

Si trazamos una línea completamente vertical, exactamente en el centro, en medio del punto de hasta arriba hasta abajo, se divide el tablero en dos partes completamente iguales. La derecha tiene la misma cantidad de puntos ubicados de la misma manera, solo que a manera de espejo.

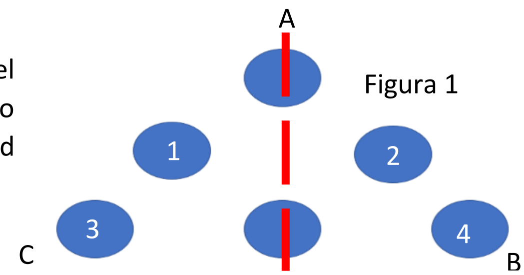


Figura 1

A esto se le conoce como *simetría.* Definida como «*La geometría señala que la simetría es la correspondencia exacta en la disposición de los puntos o partes de un cuerpo o figura respecto a un centro, eje o plano»*[1].

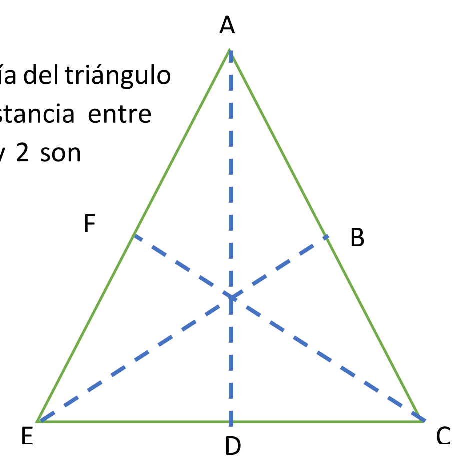
En este caso se trata de una simetría axial. «*La simetría axial se da cuando los puntos de una figura coinciden con los puntos de otra, al tomar como referencia una línea que se conoce con el nombre de eje de simetría*»[2]. El eje de simetría se trazó con la línea punteada exactamente en el centro del punto más alto del triángulo. La simetría axial se identifica con los puntos y distancias homólogas. Esto nos indica que las distancias entre cualquiera de los puntos es la misma.

$\overline{AB}=\overline{AF}=\overline{BC}$

Esto se debe a que el tablero de Galton forma un triángulo equilátero. Figura que todos sus lados y ángulos internos miden lo mismo. Esto se cumple si la distancia entre clavos y las esquinas del tablero son las mismas. Esta característica es constante sin importar el número de filas que tenga.

Ejes de simetría triángulo equilátero

El tablero tiene el mismo comportamiento. En este caso, los ejes de simetría del triángulo equilátero lo dividen en 6 partes iguales, y sabemos con precisión que la distancia entre cualquiera de los puntos semejantes es la misma. En la figura 1, los puntos 1 y 2 son iguales y se comportan de la misma manera, al igual que los puntos 3 y 4.

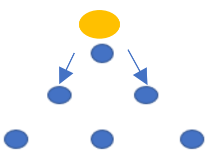


[1] https://www.ecured.cu/Simetr%C3%ADa Ultima visita (22/09/2018)
[2] http://www.pps.k12.or.us/district/depts/edmedia/videoteca/curso2/htmlb/SEC_53.HTM Ultima visita (22/09/2018)

Probabilidad

Este análisis de la simetría que tiene el tablero de Galton nos lleva a la siguiente pregunta. ¿De qué manera afecta o influye la simetría en el tablero, con la probabilidad de que la pelota o canica entre en determinada entrada?

Para ello, el primer paso fue hallar la probabilidad teórica de que cada canica cayera en determinada entrada. La pelota va cayendo por el tablero, siempre con la oportunidad de caer tanto a la izquierda como para la derecha. Conforme más filas tenga el tablero, más caminos posibles existen. Por lo que la duda surge si entre más filas la probabilidad se distribuye entre los caminos, o sin importar el número de filas, la distribución de la probabilidad por caminos se mantiene igual.



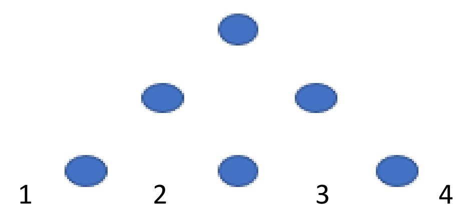
La canica, teóricamente, tiene la misma probabilidad de irse tanto para la derecha como para la izquierda

P(A): Izquierda=0.5

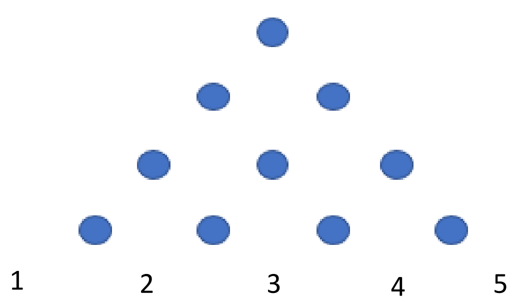
P(B): Derecha=1-P(A)=0.5

Intentemos con un tablero de **n**=3. Los números finales entre los puntos son los posibles caminos o salidas en donde la canica puede caer. I es para izquierda, y D para derecha. Ruta para las diferentes formas de llegar a un camino.

Salidas o caminos	Rutas	#Total de rutas
1	I I I	1
2	I I D D I I I D I	3
3	D D I I D D DID	3
4	D D D	1



Ahora con uno de n=4



Salidas o caminos	Rutas	#Total de rutas
1	I I I I	1
2	I I I D I I D I I D I I D I I I	4
3	I I D D I D I D I D D I D I D I D I I D D D I I	6
4	I D D D D I D D D D D I D D I D	4
5	D D D D	1

Triangulo de Pascal

Partiendo de este análisis se descubre una tendencia en los caminos que pueden tomar las canicas. Y en el triángulo mostrado a continuación se muestran el número de rutas en determinado punto.

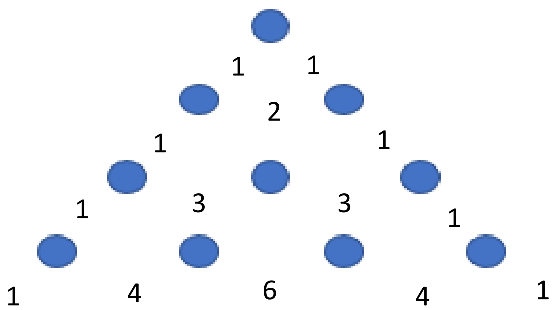


Figura 3

El número de rutas posibles de acuerdo con un punto en específico se comporta de la misma forma que el triángulo de Pascal. Existe una simetría entre puntos homogéneos, y entre más avancemos en el triángulo, los números se incrementan. Por eso, para calcular una formula general para hallar las rutas posibles de un tablero n filas en cualquier camino; se puede usar el siguiente análisis:

«Los números del triángulo de Pascal coinciden con los números combinatorios.

El número combinatorio Cm n (n sobre m) se encuentra en el triángulo en la fila n+1, en el lugar m+1»[3]

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

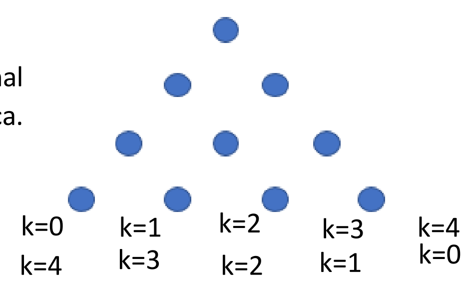
$${}_{n}C_{k}$$

Formula 1

Esta fórmula nos permite calcular las posibles rutas que existen para llegar a un camino en el tablero de Galton siendo:

- **n**: número de filas que tiene el tablero
- k: Cuantos espacios a la derecha o izquierda está el camino de los puntos en los extremos

Se puede tomar espacios tanto a la izquierda como a la derecha. Al final del día como se expuso en un inicio, el tablero se comporta de manera simétrica. Por lo que el resultado no se ve afectado por el punto de referencia.



- C: signo que representa la combinación. Definida como «*un conjunto de n elementos y sea 1 ≤ r ≤ n. Una combinación de r elementos de S es un subconjunto de S que contiene r elementos distintos*»[4]

---

[3] http://www.estadisticaparatodos.es/taller/triangulo/triangulo.html

[4] Algebra y trigonometría con geometría analítica Pag. 789

La fórmula de la combinación está dada por:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Donde el símbolo ! nos indica lo siguiente: «*multiplicar todos los números enteros positivos que hay entre ese número y el 1*». Siendo 0!=1, por norma.

Ejemplo 1: Calcular el número de rutas posibles en un tablero n=7, 4 espacios a la derecha del punto más lejano hacia la izquierda.

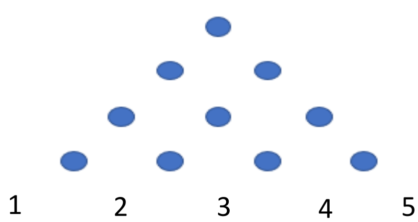
Se emplea la fórmula 1= 7C4

$$C(n,r) = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{7*6*5*4*3*2*1}{(4*3*2*1)*(3*2*1)} = 35$$

Existen 35 distintas rutas posibles por las cuales la pelota puede caer en ese espacio.

Ahora ya conocemos una manera práctica de encontrar el número de rutas posibles en determinado camino, en un tablero de n filas. Pero rutas no es lo mismo que probabilidad. Porque cuando uno se encuentra jugando en el tablero, conocer cuantas rutas no me garantiza que decisión tomar. En cambio, la probabilidad me indica de cada 100 veces cuantas ganare. Y ese el análisis que influye en las decisiones. Pero en base a las posibles rutas que existen para llegar a un camino, es posible encontrar formula que nos permita encontrar la probabilidad.

Tomemos como ejemplo de nuevo el tablero de **n**=4



Utilizaremos la siguiente fórmula para calcular la probabilidad:

$$\frac{Numero\ de\ rutas\ camino\ x}{Rutas\ totales}$$

Fórmula 2

Probabilidad camino 1: k=0 $\quad \frac{4C0}{4C0+4C1+4C2+4C3+4C4} = \frac{1}{16}$

Probabilidad camino 2: k=1 $\quad \frac{4C1}{4C0+4C1+4C2+4C3+4C4} = \frac{1}{4}$

Probabilidad camino 3: k=2 $\quad \frac{4C2}{4C0+4C1+4C2+4C3+4C4} = \frac{1}{8}$

Probabilidad camino 4: k=3 $\quad \frac{4C3}{4C0+4C1+4C2+4C3+4C4} = \frac{1}{4}$

Probabilidad camino 5: k=4 $\frac{4C4}{4C0+4C1+4C2+4C3+4C4}=\frac{1}{16}$

Lo formula 2 es un análisis simple de como hallar la probabilidad. Nos expone que la probabilidad de que la pelota caiga en determinado camino x es la división entre el número de rutas diferentes al camino x, con la sumatoria de todas las rutas de los caminos n+1 que tiene un tablero de n filas.

Este análisis se expresa de una manera general a través de la fórmula 2. Que nos permite hallar la probabilidad de cualquier camino en un tablero de n:

$$\frac{(nCk)}{\sum_{i=0}^{n} nCi}$$ **Fórmula 3**

nCk: #rutas a determinado punto **(fórmula 1)**

$\sum_{i=0}^{n} nCk$ Sumatoria de todas las rutas de cada uno de los caminos de un tablero. Empezando desde nC0, hasta nCn.

Por la distribución de los caminos, y la simetría que existe entre ellos; nos permite encontrar otra manera de representar la fórmula 3. Y esta se le llama distribución binomial, que se define como «*En estadística, la distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que indica el número de éxitos al realizar una secuencia de n ensayos independientes entre sí, con una probabilidad fija (p) de ocurrencia del éxito entre esos ensayos*».[5]

Se puede relacionar a este juego con esta distribución, al tener características especiales como las siguientes:

- Cada intento solo tiene la probabilidad A o B, no más. En este caso, que la pelota se mueva hacia la izquierda o derecha
- Se trata de una probabilidad de eventos independientes. Es decir, el resultado de muestras anteriores no afecta el resultado de la siguiente. En el tablero, que la pelota se mueva a la izquierda o derecha en la tercera fila es la misma, independientemente de donde se movió en las filas 1 y 2.
- La probabilidad de los eventos A y B no cambian ante ninguna circunstancia.

Para calcular la formula general, se utilizarán los siguientes conceptos para hallar la probabilidad en cada uno de los caminos:

- P^k=Probabilidad de que la canica se mueva a la izquierda. Siendo k el número de espacios del extremo derecho.

[5] (www.profesorenlinea.cl s.f.) Ultima visita (28/09/2018(

- $(1-P)^{n-k}$=Probabilidad que tienen los demás rebotes diferentes a P^k. Siendo n el número de rebotes posibles determinado por la cantidad de filas n.

El siguiente análisis nos permite encontrar cual es la probabilidad que la combinación de eventos suceda:

Fórmula 4

$$P^k(1-P)^{n-k}$$

Analizado de otra manera, la formula nos indica lo siguiente. Supongamos que del tablero n=4 deseamos conocer la probabilidad 2 casillas a la izquierda del extremo derecho. Hagamos la analogía de que las direcciones son como pelotas de dos colores distintos en una bolsa, que son sacadas aleatoriamente. Para llegar 2 casillas de izquierda a derecha, es necesario sacar de la bolsa dos I, y 2 D. Sin importar el orden, el camino necesita que se cumpla este requisito, o si no se trataría de otro camino. Por lo que:

- k=2. Número de elementos I que deben existir
- n-k=2. Número de elementos D

I	**I**	**D**	**D**

La fórmula 4 nos indica cual es la probabilidad tomemos 2 I, y 2 D. Pero no de cuantas formas distintas esto puede suceder. Es decir, podría ser I, seguido de 2 D y una I. O 2 D, y 2 I. La fórmula 4 es multiplicada por la combinación de los elementos. De cuantas formas diferentes puedo ordenar 2 I y 2 D.

Por consiguiente, otra manera de representar la probabilidad de que una canica entre en determinado agujero está dada por:

$$P^k(1-P)^{n-k} \times nCk$$

Fórmula 5

Función teórica

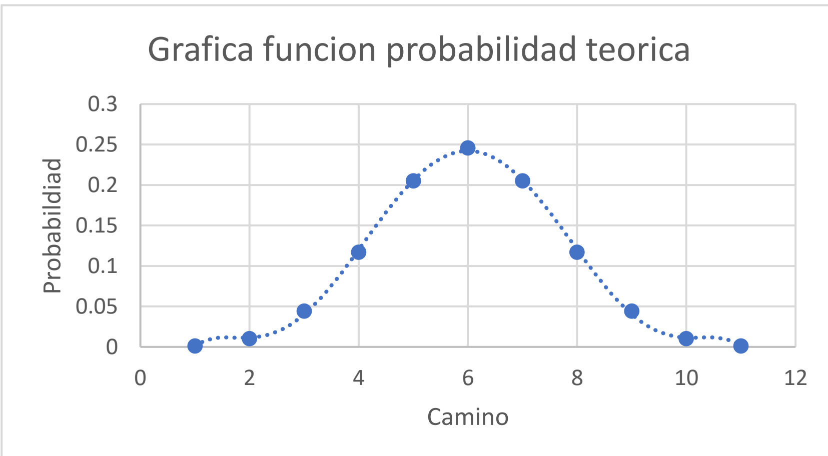
Ya con el análisis completo de cómo se comporta un tablero de Galton teóricamente, el siguiente paso es graficar una función de probabilidad y ver cómo se comporta el tablero. Para comprar datos similares, se utilizará un tablero de n=10, de igual tamaño del tablero que se utilizó en el experimento. Con la fórmula 1 se hallaron las rutas en cada uno de los caminos. Y ya sea con la fórmula 3 o 5, se encontró la probabilidad en cada camino. Cual se utilice es cuestión de facilidades, puesto a que ambas generan los mismos resultados.

X(Caminos)	#Rutas	Probabilidad total
1	1	0.001
2	10	0.010
3	45	0.044
4	120	0.117

5	210	0.205
6	252	0.246
7	210	0.205
8	120	0.117
9	45	0.044
10	10	0.010
11	1	0.001
	1024	1.000

Tabla 2. Probabilidades teóricas

Se realizó la una función de probabilidad, teniendo en el eje *x* los caminos, y en el eje *y* la probabilidad



Grafica 1. Función teórica

Podemos apreciar que la función tiene la forma de la Campana de Gauss. Definida como «*representación gráfica de la distribución normal de un grupo de datos. Éstos se reparten en valores bajos, medios y altos, creando un gráfico de forma acampanada y simétrica con respecto a un determinado parámetro*» Es curioso como un tablero de Galton se comporta de la misma manera que un concepto matemático que es utilizado para cálculos astronómicos y estadísticos de poblaciones. La ecuación de la campana de Gauss está dada, por concepto, como:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Este resultado era el que esperábamos cuando se calculó la fórmula 4 con la distribución normal, ya que esta se comporta como una campana de Gauss, la cual posee ciertas características importantes:[6]

- Es una distribución simétrica.
- Es asintótica, es decir sus extremos nunca tocan el eje horizontal, cuyos valores tienden a infinito.

[6] http://www.medwave.cl/link.cgi/medwave/series/mbe04/5033?ver=sindiseno Ultima visita (05/10/2018)

• En el centro de la curva se encuentran la media, la mediana y la moda.
• El área total bajo la curva representa el 100% de los casos.
• Los elementos centrales del modelo son la media y la varianza.

Grafica practica

Ahora es necesario calcular la gráfica y la función de probabilidad de la tabla 1, de los datos experimentales del tablero de Galton.

Numero de entrada (Izquierda a derecha) (x)	Numero de canicas (y)
1	65
2	79
3	103
4	77
5	80
6	74
7	84
8	62
9	84
10	107
11	185
TOTAL	1000

Tabla 1. Datos recopilados

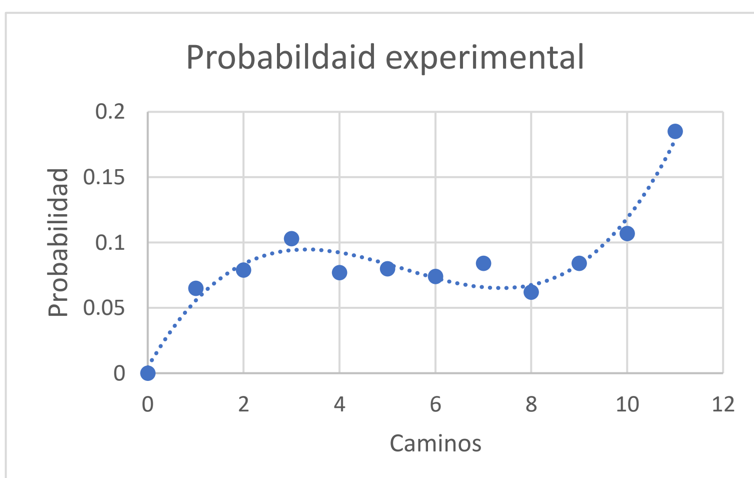
Para hallar la probabilidad de cada entrada, no se puede utilizar la fórmula 1 o 2, ya que no conocemos con exactitud si el tablero experimental se comporta de la misma manera que el teórico. Por eso utilizaremos el siguiente análisis:

$$\frac{Numero\ de\ canicas\ en\ cada\ camino}{Total\ de\ lanzamientos}$$

En este caso, el total de lanzamientos son 1000, y el número de canicas son los datos del eje y de la tabla 1.

Camino	Probabilidad
0	0
1	0.065
2	0.079
3	0.103
4	0.077
5	0.08
6	0.074
7	0.084
8	0.062
9	0.084
10	0.107
11	0.185

Tabla 3. Probabilidad experimental



Grafica 2. Experimentos tablero de Galton

La grafica claramente muestra una tendencia cubica, al tener dos puntos en la gráfica donde la pendiente es igual a 0, y sufre un cambio de concavidad. Por eso para calcular la función es necesario utilizar una regresión cubica.

[7] En este caso, la suma de los cuadrados es:

$$Sr = \sum_{i=1}^{n} (Yi - a_o - a_1x_i - a_2x_i^2 - a_3x_i^3 - \dots - a_mx_i^m)^2$$

Que a la larga nos llevará al siguiente conjunto de ecuaciones :

$$\begin{array}{lllllll}
a_o n & + a_1 \sum x_i & + a_2 \sum x_i^2 & + & \dots & + a_m \sum x_i^m & = \sum y_i \\
a_o \sum x_i & + a_1 \sum x_i^2 & + a_2 \sum x_i^3 & + & \dots & + a_m \sum x_i^{m+1} & = \sum x_i y_i \\
a_o \sum x_i^2 & + a_1 \sum x_i^3 & + a_2 \sum x_i^4 & + & \dots & + a_m \sum x_i^{m+2} & = \sum x_i^2 y_i \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
a_o \sum x_i^m & + a_1 \sum x_i^{m+1} & + a_2 \sum x_i^{m+2} & + & \dots & + a_m \sum x_i^{2m} & = \sum x_i^m y_i
\end{array}$$

Imagen 2. Fórmula regresión polinómica

Utilizaremos esta fórmula para hallar los valores de las matrices, que nos permitirán encontrar nuestra ecuación cuadrática.

X_i	Y_i	X_i^2	X_i^3	X_i^4	X_i^5	X_i^6	$X_i Y_i$	$X_i^2 Y_i$	$X_i^3 Y_i$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.065	1	1	1	1	1	0.065	0.065	0.065
2	0.079	4	8	16	32	64	0.158	0.316	0.632
3	0.103	9	27	81	243	729	0.309	0.927	2.781
4	0.077	16	64	256	1024	4096	0.308	1.232	4.928
5	0.08	25	125	625	3125	15625	0.4	2	10
6	0.074	36	216	1296	7776	46656	0.444	2.664	15.984
7	0.084	49	343	2401	16807	117649	0.588	4.116	28.812
8	0.062	64	512	4096	32768	262144	0.496	3.968	31.744
9	0.084	81	729	6561	59049	531441	0.756	6.804	61.236
10	0.107	100	1000	10000	100000	1000000	1.07	10.7	107
11	0.185	121	1331	14641	161051	1771561	2.035	22.385	246.235
66*	1	506	4356	39974	381876	3749966	6.629	55.177	509.417

*La última fila representa la sumatoria de la columna

Tabla 4. Regresión cubica

Por lo que la matriz queda de la siguiente manera:

A_0	A_1	A_2	A_3	
12	66	506	4356	1
66	506	4356	39974	6.629
506	4356	39974	381876	55.177
4356	39974	381876	3749966	509.417

$X_1 = 1199/273000 = 0.00439 \quad X_2 = 695083/10810800 = 0.0643$

[7] https://es.slideshare.net/diegoegas/regresion-polinomial-2512264 Ultima visita (29/09/2018

X_3 = -2033/144144=-0.0141 X_4 = 851/965250=0.0009

La ecuación de la gráfica 2 como se dedujo, se comporta como una función de probabilidad cúbica. Y la función queda determinada de la siguiente manera:

f(x) = $0.0009x^3 - 0.0141x^2 + 0.0643x + 0.0044$

$R^2 = 0.948$

Ecuación 1

La correlación de la función elevado al cuadrado se aproxima mucho a 1. Esto nos indica que las dos variables de estudio se asemejan mucho de forma cúbica. Por lo que la ecuación 1 es la que mejor representa la gráfica 1.

Para comprobar si la ecuación 1 es correcta, utilizaremos la técnica de integración. «*consiste en el área bajo la curva delimitada por los extremos de esta y sus proyecciones sobre uno de los ejes. La integración es un concepto fundamental del análisis matemático y las ecuaciones diferenciales, Básicamente, una integral es una suma de infinitos sumandos, infinitamente pequeños*» Por eso, al tratarse de una función de probabilidad, cuando hallemos el área bajo la curva teóricamente el resultado debe de ser 1 o 100%. Porque es la suma de todas las probabilidades de los diferentes caminos.

Fórmula 6

$$\int_0^{11}(0.0009x^3 - 0.0141x^2 + 0.0643\text{x} + 0.0044)\text{dx}$$

$$bx^z = \int \frac{b}{z+1}x^{z+1}$$

$$0.0009x^3 \xrightarrow[\text{Derivada}]{} \frac{0.0009}{3+1}x^{3+1} = 0.000225x^4$$

Se realizó el mismo proceso matemático en cada exponente. Y el resultado de la integración de f(x) es el siguiente:

$$\int_0^{11} f(x) = \left[(0.000225x^4 - 0.0047x^3 + 0.03215x^2 + 0.0044x \left|\begin{matrix}11\\ \\0\end{matrix}\right.\right]$$

El método de integración nos indica que debemos sustituir los valores de x establecidos en la formula integrada, y restarlos.

$$f(11) = 0.000225x^4 - 0.0047x^3 + 0.03215x^2 + 0.0044x = 0.989$$

$$f(0) = 0.000225x^4 - 0.0047x^3 + 0.03215x^2 + 0.0044x = 0$$

Restando estos dos valores obtenemos el resultado de la integración.

$$\int_0^{11} f(x) = f(11) - f(0) = 0.989$$

El resultado es muy cercano a 1. No es exactamente el resultado teórico, debido al correlación r =0.948 que tiene la ecuación. Pero 0.989 nos indica que la Ecuación 1 satisface correctamente el experimento realizado.

Prueba de hipótesis

Ya analizado cada una de las gráficas, tanto la teórica como la práctica, surgen dudas sobre si el experimento realizado se asemeja a lo que en teoría sucede con el tablero de Galton. Para luego poder concluir cuales son los aspectos importantes que debe de tener un tablero experimental para que cumpla con los análisis teóricos planteados.

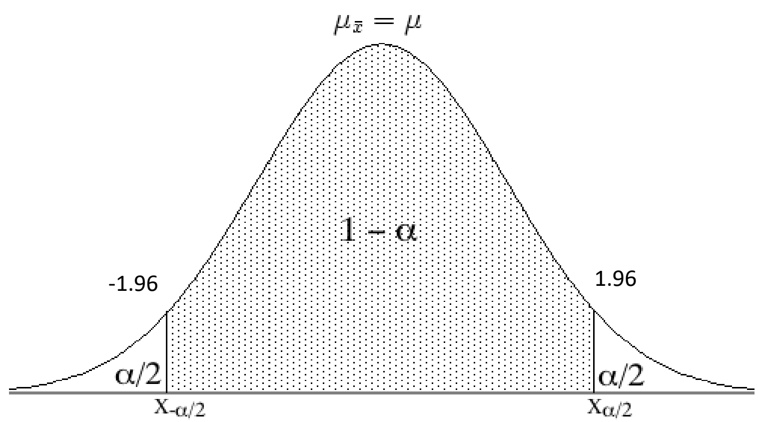
Para poder hacer este contraste se realizará una prueba de hipótesis. Esta se define como *«proceso para determinar la validez de una aseveración hecha sobre la población basándose en evidencia muestral»*.

Nivel de confianza (α): 95%≈0.95   Nivel de significancia:(1- α) 5%≈0.05

En este caso se trata de una prueba de hipótesis bilateral, puesto a que no conocemos si A (teórica) es mayor o menor a B(experimental). Por lo que solo se establece una hipótesis de desigualdad, que puede ser tanto mayor como menor. Esto nos lleva a dividir el nivel de insignificancia dentro de 2.

$\frac{\alpha}{2}$=0.025

De acuerdo con la tabla de la curva normal, el 0.975 tiene un Z critico de 1.9. Por lo que la gráfica de la curva normal quedaría representada de la siguiente manera:[8]



En esta prueba de hipótesis se compararán los datos teóricos con los experimentales de cada camino. Es decir, se contrastarán los 11 caminos del tablero de Galton, para establecer si existe o no relación entre ellos.

H_0 (Hipótesis nula)	**H_f (Hipótesis alternativa)**
$p = \check{p}$	$p \neq \check{p}$
Probabilidad teórica = Probabilidad experimental	Probabilidad teórica ≠ Probabilidad experimental

[8] https://www.ditutor.com/inferencia_estadistica/contraste_hip%C3%B3tesis.html Ultima visita (05/10/2018)

Se utilizará la siguiente formula: $$Z = \frac{\frac{x}{n} - P_O}{\sqrt{\frac{P_O(1-P_O)}{n}}}$$

Donde

- x=Numero de ocurrencias del evento (probabilidad experimental)
- n=Numero de intentos (1000 lanzamientos)
- p_o= Proporción definida (probabilidad teórica)

Si -1.96 ≤Z≤ 1.96, nos indica que el camino estudiado en el experimento se comporta similar a la probabilidad teórica.

Calculo camino 1

X=65 N=1000 p_o=0.001

$$Z = \frac{\frac{65}{1000} - 0.001}{\sqrt{\frac{0.001(1-0.001)}{1000}}} = 64.03$$

De la misma manera se realizaron los cálculos para cada uno de los 11 caminos, y los resultados se muestran en la siguiente tabla:

#Camino	Z prueba
1	64.03
2	21.93
3	9.10
4	-3.94
5	-9.79
6	-12.63
7	-9.48
8	-5.14
9	6.17
10	30.83
11	184.09

Podemos apreciar que ninguno de los caminos entra en el rango entre -1.96 y 1.96, por lo que la probabilidad teórica y experimental no mantiene ninguna relación, con un 95% de confianza.

Conclusiones

Para concluir, podemos afirmar que el tablero Galton si se comporta como una campana de Gauss cuando nos referimos a la probabilidad de cada camino.

El primer análisis fue la simetría. El tablero de Galton tiene forma de un triángulo equilátero, donde todos sus lados y ángulos miden lo mismo. Al trazar un eje de simetría en el medio, se divide el tablero en dos partes completamente iguales. Se forma un espejo entre cada una de las partes. Y la distancia entre cada uno de los puntos iguales en cualquiera de los dos lados es la misma. Este análisis se traduce al comportamiento de tablero. Ya que podemos inferir que caminos en el tablero se comportan de la misma manera.

Por medio de un análisis de combinatoria, se descubrió la fórmula general para encontrar el número de rutas posibles a determinado punto. Donde n es el número de filas en el tablero, y k cuantos espacios del extremo izquierdo o derecho se encuentra el camino que se desea calcular.

$$nCk$$

Cuando situamos el número de rutas en el tablero, nos queda distribuido de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

La misma forma que un triángulo de pascal. Entre más filas contenga en tablero, más posibles rutas existen. Y entre más centrado este el punto, más caminos tendrá.

Partiendo de este análisis de rutas podemos encontrar la probabilidad en cada camino. Este se encontró de dos maneras diferentes. El primero con el mismo concepto de combinatoria.

$$\frac{(nCk)}{\sum_{i=0}^{n} nCi}$$

El segundo por medio de la distribución binomial.

$$P^k(1-P)^{n-k} \times nCk$$

Este juego, como se expuso en un inicio, es utilizado en ferias. El juego consiste en que el participante lanza un determinado número de canicas con un costo inicial. Si la canica se introduce en determinado punto el participante gana, o si no lo pierde todo. Con ese análisis de probabilidad permite a los dueños establecer precios en cada camino. En los extremos pueden poner los premios más altos debido a que la probabilidad es muy baja. Y en los caminos del centro donde pierde el participante.

Por ese motivo se decidió crear un tablero experimental, para analizar cuáles son los aspectos esenciales para que el tablero se comporte lo más cercano a la teoría. Se grafico una función de probabilidad teórica y experimental. Para después contrastarlas con una prueba de hipótesis. Y como se concluyó que ninguno de los caminos guardaba relación con la teoría, y se comportaban de manera completamente distinta, con un 95% de confianza. Ninguna Z de prueba estaba en el rango entre -1.96 y 1.96. Esto pudo haber ocurrido por los siguientes motivos:

- La distancia entre todos los clavos no era la misma. Algunos tenían entre 2cm y otros 2.5 cm
- El camino #11 fue el que más probabilidad tuvo. Esto ocurrió porque el espacio de la orilla era muy amplio comparado con los demás. Por lo que tenía más probabilidades de tomar esa ruta.
- El espacio donde salían las canicas era muy amplio. Y esto al lanzaran ya determinaba hacia donde se dirigía la canica.
- La madera no estaba lo suficientemente lijada, y esto modificaba el rumbo de la canica

Esto nos permite analizar que la simetría en el tablero es el aspecto más influyente para que el tablero se comporte como la campana de Gauss. Es necesario que todos los calvos estén a la misma distancia. Ya que si no lo están, la probabilidad 50% de izquierda o derecha cambia por completo.

Estas conclusiones pueden abrir campo a más estudios sobre el tablero de Galton. Se podrían hacer estudios sobre como distintos ángulos de inclinación de done se lanzan las canicas afectan la probabilidad. También como la distancia entre clavos afecta la probabilidad. Y probablemente encontrar una fórmula general que nos permita encontrar la probabilidad de izquierda y derecha de acuerdo a la distancia entre clavos.

Bibliografía

Egas, Diego. s.f. *es.slideshare.net.* https://es.slideshare.net/diegoegas/regresion-polinomial-2512264.

Swokowski. 2009. *Álgebra y trigonometría con geometría analitica.* Mexico DF: Cengage Learning.

Varea, Diego. s.f. *es.slideshare.net.* https://es.slideshare.net/diegoegas/regresion-polinomial-2512264.

s.f. *www.ditutor.com.* Último acceso: 05 de 10 de 2018. https://www.ditutor.com/inferencia_estadistica/contraste_hip%C3%B3tesis.html.

s.f. *www.ecured.cu.* Último acceso: 09 de 22 de 2018. https://www.ecured.cu/Simetr%C3%ADa.

s.f. *www.medwave.cl.* Último acceso: 05 de 10 de 2018. http://www.medwave.cl/link.cgi/medwave/series/mbe04/5033?ver=sindiseno.

s.f. *www.pps.k12.or.us.* http://www.pps.k12.or.us/district/depts/edmedia/videoteca/curso2/htmlb/SEC_53.HTM.

s.f. *www.profesorenlinea.cl.* http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Distribucion_binomial.html.